Série A, N° 3896 .
N° d'ordre :
4747

THÈSES

présentées

**A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Marcel LENOIR

1re THÈSE : Sur quelques généralisations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrodinger.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 18 JUIN 1962 devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ Président

Mme M. A. TONNELAT
Mme CHOQUET-BRUHAT } Examinateurs

Série A, N° 3896
N° d'ordre :
4747

THÈSES

présentées

**A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Marcel LENOIR

1re THÈSE : **Sur quelques généralisations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrodinger.**

2e THÈSE : **Propositions données par la Faculté.**

Soutenues le devant la Commission d'examen

M. LICHNEROWICZ Président

Mme M. A. TONNELAT
Mme CHOQUET-BRUHAT } Examinateurs

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... ZAMANSKY

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supér.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
WYART	T	Minéralogie et Cristallogr.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie Générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie Générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie Animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIERE	T	Géologie S.P.C.N. et sédim.
GAUTHERET	T	Biologie Vég. (P.C.B.).
LUCAS R.	T	Recherches Physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécan. expérimentale des Fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosph.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie Physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie Générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique Générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombr.
QUELET	T	Chimie Organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie Macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électroniq.
WIEMANN	T	Chimie organique et struct.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories Physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallogr.
J.-P. MATHIEU	T	Physique (Optique).
COUTEAUX	T	Biol. Animale (P.C.B.).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie Végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul diff. et Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T	Calcul diff. et intégral.
NORMANT	T	Synthèse organique générale.
BENARD	T	Chimie Minérale.
BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie Végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T	Théories Chrimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutri.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Applic. de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Tech. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
LEVY	T	Physique théorique des hautes Energies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY		Biologie Végétale (P.C.B.).
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
BRUN	T	Mécan. théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (Agreg.).
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J.-E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL André	T	Chimie Minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.

Imp. 14, r. Soufflot, Paris-Ve

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538127_0002

BARCHEWITZ	T	Chimie Physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER		Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie Vég. B.M.P.V.
CASTAING	T	Physique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallogr.
MOYSE	T	Physiologie végét. (Orsay).
NOIROT		Evolution des êtres organisés.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie théorique.
TEILLAC	T	Physique Nucléaire et Radioactivité (Orsay).
TONNELAT	T	Biologie physico-chim.
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART		Chimie (P.C.B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches Physiques.
GUINOCHET	T	Biol. Vég. S.P.C.N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle JOSIEN	T	Chimie S.P.C.N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques (Orsay).
DENY	T	Mathématiques Générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie Physique.
BERTHELOT	T	Physique Fondamentale des Hautes Energies (Orsay).
BRICART	T	Météorologie et phys. de l'Atmosph.
Mme ALBE-FESSARD		Psychophysiologie.
FRIEDEL		Physique des Solides (Orsay).
M. JULIA		Étude des Moléculaires naturelles complexes.
LENDER	T	Biologie Animale (S.P.C.N.), Orsay.
MAGAT		Physico-chimie des radio-éléments.
Mlle QUINTIN	T	Electrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physiol. Anim. (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
HAISSINSKY	T	Radiochimie.
LEMÉE	T	Physiol. Vég. B.M.P.V. (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie M.P.C. (Orsay).
CHATELET M.		Chimie (P.C.B.).
JEAN	T	Physique Nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique S.P.C.N.
MICHEL Louis		Physique Théor. des Hautes Énergies (Orsay).
BERGERARD		Zoologie (Orsay).
BERTEIN		Electronique (Orsay).
BOUISSIÈRES		Chimie des Radioéléments (Orsay).
Mme COUTURE		Thermodynamique et Mécanique Physique.
ELLENBERGER		Géologie appli. sur le terr.
FRANC		Biol. Animale (P.C.B.).
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay).
STOLKOWSKI		Physiologie générale.
ACHER		Chimie Biol. (Orsay).
BAUDOIN		Biologie animale P.C.B.
BEAUMONT		Biologie animale S.P.C.N.
BLAMONT		Géophysique Ionosphère.
BOURREAU		Botanique.
CURIE D.		Physique (M.G.P.).
DURAND-DELGA		Géologie.
FREON	T	Chimie Organique (Orsay).
HELLER		Physiologie végétale.
TORTRAT		Calcul des Probabilités.
CAILLEUX		Géologie (S.P.C.N.).
MAGNAN	T	Physique (S.P.C.N.).
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Mécan. Analytique et Méc. céleste.
Mlle VEIL		Physiologie Générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expériment.
LACOMBE	T	Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T	Physique P.C.B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques M.P.C. (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie phys. et Géol. Dynamique.
COMOLET		Mécanique des Fluides.
CORABŒUF		Physiologie Animale.
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie Animale P.C.B.
JULLIEN J.		Chimie P.C.B.
MALGRANGE		Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE		Physique E.N.S. (Orsay).

Secrétaire Général . . R. POULLAIN

Imp. 14, r. Soufflot, Paris-V°

A la Mémoire

de mes Parents

INTRODUCTION

La Relativité Restreinte a permis d'expliquer les phénomènes électromagnétiques en prenant pour cadre géométrique l'espace-temps pseudo-euclidien, à quatre dimensions, de Minkowski, mais elle néglige complètement la gravitation.

Pour expliquer les phénomènes gravitationnels, Einstein a été conduit, en partant du principe de l'équivalence de l'inertie et de la gravitation, à construire la Relativité Générale.

Le cadre géométrique de cette théorie est constitué par une variété riemannienne V_4 à quatre dimensions, dont la métrique de type hyperbolique normal est définie par le tenseur symétrique des potentiels de gravitation g_{ik} qui représente le champ gravitationnel. Cette métrique définit sur l'espace tangent en chaque point V_4 une structure d'espace de Minkowski qui permet les interprétations physiques.

Les équations de la Relativité Générale s'écrivent alors :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} \cdot R = \chi \cdot T_{ij} \quad . \tag{I.0}$$

où R_{ij} est le tenseur de Ricci de V_4 et χ un facteur constant .

Le premier membre S_{ij} de ces équations ne dépend que du tenseur métrique g_{hk} et possède donc un caractère purement géométrique, tandis que "le second membre est une description phénoménologique de toutes les sources du champ de gravitation"*, description complètement dépourvue de signification géométrique.

Le tenseur S_{ij} satisfait aux quatre identités

$$\nabla_i \; S^i{}_j = 0$$

Il en résulte que le tenseur d'impulsion-énergie T_{ij} est conservatif

$$\nabla_i \; T^i{}_j = 0$$

Ces équations permettent, dans la méthode du tenseur d'énergie, d'établir la loi de conservation de la matière et de l'énergie, puis d'obtenir les équations du mouvement des corps qui se trouvent dans le champ.

Dans le cas de l'électromagnétisme, le tenseur d'impulsion-énergie T_{ij} est induit à partir de la Relativité Restreinte, mais il reste étranger aux axiomes de la Relativité Générale. Il convient, dans ce cas, d'ajouter aux équations d'Einstein (I.0) les équations de Maxwell qui régissent le champ électromagnétique F_{ij}

$$\nabla_i F^{ih} = J^h \quad ; \quad \nabla_i ({}^* F)^{ij} = 0$$

---

* A. Einstein - Théorie de la gravitation généralisée (6)

et qui font apparaître un nouvel élément étranger au champ: le courant électrique J^h .

Les équations du champ de cette théorie, dite d' Einstein-Maxwell, peuvent s'obtenir en appliquant un principe variationnel au lagrangien

$$(R_{ij} \cdot g^{ij} - \chi \cdot F_{ij} \cdot F^{ij}) \cdot \sqrt{-g} .$$

où χ est une constante et F_{ij} un rotationnel :

$$F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$$

L'étude du problème de Cauchy pour les équations du champ permet de montrer l'identité des lois de propagation des champs électromagnétique et gravitationnel.

Pour tenter d'unifier ces deux champs, la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger utilise une variété différentiable à quatre dimensions sur laquelle deux êtres géométriques sont définis :

un champ de tenseurs g_{ij} et une connexion linéaire Γ^h_{ij} non symétriques. R_{ij} (Γ) étant le tenseur de Ricci de cette connexion les équations du champ résultent de l'application d'un principe variationnel au lagrangien

$$R_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} .$$

Ces équations s'écrivent :

et qui font apparaître un nouvel élément étranger au champ: le courant électrique J^h .

Les équations du champ de cette théorie, dite d' Einstein-Maxwell, peuvent s'obtenir en appliquant un principe variationnel au lagrangien

$$(R_{ij} \cdot g^{ij} - \chi \cdot F_{ij} \cdot F^{ij}) \cdot \sqrt{-g} .$$

où χ est une constante et F_{ij} un rotationnel :

$$F_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$$

L'étude du problème de Cauchy pour les équations du champ permet de montrer l'identité des lois de propagation des champs électromagnétique et gravitationnel.

Pour tenter d'unifier ces deux champs, la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger utilise une variété différentiable à quatre dimensions sur laquelle deux êtres géométriques sont définis :

un champ de tenseurs g_{ij} et une connexion linéaire Γ^h_{ij} non symétriques . R_{ij} (Γ) étant le tenseur de Ricci de cette connexion les équations du champ résultent de l'application d'un principe variationnel au lagrangien

$$R_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} .$$

Ces équations s'écrivent :

$$\mathfrak{g}^{ij}_{+-};\,h = \partial_h \mathfrak{g}^{ij} - \mathfrak{g}^{ij}\cdot\Gamma^{\ t}_{h\ t} + \mathfrak{g}^{it}\cdot\Gamma^{\ j}_{h\ t} + \mathfrak{g}^{tj}\cdot\Gamma^{\ i}_{t\ h} =$$

(II)

$$-\frac{2}{3}\cdot\delta^{\ j}_{h}\cdot\mathfrak{g}^{it}\cdot\Gamma_{t} + \mathfrak{g}^{ij}\cdot\Gamma_{h}$$

$$\partial_i\ \mathfrak{g}^{ij}_{\vee} = 0$$

$$R_{ij}(\Gamma) = 0$$

où Γ_h désigne le vecteur de torsion $\Gamma^{\ t}_{h\ t}$ de la connexion $\Gamma^{\ p}_{q\ r}$ et $R_{ij}(\Gamma)$ le tenseur de Ricci de cette connexion.

Les équations (I) constituent "le système faible" des équations du champ.

Einstein a proposé d'adjoindre à ce système la condition :

$$\Gamma_i = 0$$

On obtient alors les équations "du système fort" :

(III) $\mathfrak{g}^{ij}_{+-};\,h = 0 \qquad \Gamma_i = 0 \qquad R_{ij}(\Gamma) = 0$

On peut remarquer que l'équation (III , 2) a pour conséquence :

$$\partial_i\ \mathfrak{g}^{ij}_{\prime} = 0$$

et que le système (III) n'est pas déductible d'un principe variationnel dans la forme initiale de la théorie.

En construisant une théorie de la gravitation basée sur l'emploi d'une connexion linéaire et d'un tenseur fondamental non-symétrique, Einstein et Schrödinger se proposaient d'obtenir :

a) Une théorie unitaire, c'est à dire de faire disparaître la dualité champ gravitationnel - champ électromagnétique "ces deux champs étant unis dans un même hyperchamp dont les équations représentent les conditions imposées à la structure géométrique de l'univers". (1)

b) Une théorie non dualiste, c'est à dire de faire disparaître la dualité champ-particules, ce qui interdit de considérer les particules comme des singularités du champ.

Pour être physiquement intéressante, la théorie ainsi construite devrait permettre de trouver, à partir des équations du champ, les équations du mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique, équations dans lesquelles devrait apparaître la force de Lorentz.

Or, Infeld en 1950 et Callaway en 1954 ont montré respectivement, que des équations du champ du système fort, et du système faible, on ne pouvait déduire que les équations du mouvement d'une particule neutre.

Mais le résultat négatif obtenu par ces auteurs est dû au fait qu'ils choisissent la solution $\varphi = \frac{1}{r}$ de l'équation biharmonique

$$\Delta \Delta \varphi = 0 ,$$

(où Δ est le laplacien de l'espace euclidien à trois dimensions) que vérifie en première approximation le potentiel électrostatique φ .

Mme M.A. Tonnelat - La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger [13]

En choisissant la solution à symétrie sphérique

$$\varphi = \frac{A}{r} + C\,r$$

de l'équation précédente, Treder [47] , Clauser [42] [43] et Crumeyrolle* ont fait apparaître, par la méthode des singularités, la force de Coulomb dans les équations du mouvement d'une particule chargée, grâce à des approximations quasi-statiques du type habituel.

Malheureusement ce résultat est inadmissible pour le physicien, car la force de Coulomb est accompagnée d'une force radiale dont le module est indépendant de la distance, et qu'il est impossible de faire disparaitre sans provoquer en même temps la disparition de la force de Coulomb . Pour des valeurs de r assez petites, on peut, par un choix convenable des constantes A et C , rendre le module de cette force supplémentaire . très petit par rapport à celui de la force de Coulomb , mais l'existence de cette force supplémentaire est incompatible avec la notion de système physique isolé ou quasi-isolé.

Des modifications de la théorie initiale d'Einstein-Schrödinger ont alors été proposées par Kursunoglu, W.B. Bonnor [23] [24] et Mme M.A. Tonnelat [30] [31] [32] . Nous les résumerons au Chapitre II .

Nous pouvons dire dès maintenant que W.B. Bonnor a construit un système d'équations du champ qui permet de faire apparaître la force de Coulomb dans les équations du mouvement grâ-

---

* Crumeyrolle - Thèse Paris 1961

ce à l'addition au lagrangien initial d'un terme supplémentaire

$$- p^2 \cdot g_{ij} \cdot \mathcal{T}^{ij}_V$$

Mais cette addition détruit le caractère unitaire de la théorie puisque ce terme supplémentaire ne s'intègre pas au cadre géométrique de cette théorie.

Nous avons tenté de définir une structure géométrique plus générale que celle de la théorie d'Einstein-Schrödinger et qui permet d'intégrer le terme introduit par W.B. Bonnor à la contraction du tenseur de Ricci qui constitue le lagrangien habituel. La théorie de Bonnor prend alors un caractère unitaire.

D'autre part les équations du mouvement ont été obtenues par l'emploi de la méthode d'Einstein, Infeld, Hoffmann qui considère les particules comme des singularités du champ. Le principe de cette méthode est donc opposé à l'esprit de la théorie qui voudrait être non-dualiste.

La méthode du tenseur d'énergie s'harmonise bien avec la théorie d'Einstein-Schrödinger, mais son application exige la présence dans le tenseur d'impulsion-énergie d'un tenseur matériel, et d'un tenseur de type électromagnétique.

Nous avons tenté d'utiliser la structure géométrique d'une hypersurface V_4 plongée dans une variété V_5 munie d'une connexion linéaire et d'un tenseur fondamental, pour introduire ces tenseurs.

Mais il convient de remarquer qu'en relativité générale, les équations du champ, dans le cas d'un schéma matière-pure, ou dans le cas de la matière neutre en présence d'un champ électromagnétique, ne peuvent se déduire d'un principe variationnel

dans lequel on considère le vecteur vitesse unitaire u_i comme une variable.

Il semble donc qu'une théorie unitaire obtenue à partir d'un tel principe ne puisse conduire à des équations du champ qui se réduisent, dans des cas particuliers à celles du schéma matière pure, ou à celles de la matière non chargée en présence d'un champ électromagnétique.

Le plan de notre travail est le suivant :

Dans le Chapitre I, nous rappelons, d'après l'exposé de M. Lichnerowicz*, les notions d'espace fibré principal, de connexion infinitésimale, de connexion linéaire, affine et coaffine. Nous rappelons les propriétés d'une sous-variété V_n de la variété V_{n+1} et les notions de vecteur dérivé et de connexion linéaire induite.

Si l'on considère la sous-variété V_n dont l'équation est $x^o = o$ et si l'on se limite aux transformations de coordonnées:

$$x'^o = x^o \qquad x'^i = f'^i(x^j) ,$$

on à des transformations un peu plus générales, une connexion linéaire définie sur l'espace fibré principal $E(V_{n+1})$ prend la forme

$$\left(\omega_\beta^\alpha \right) = \begin{pmatrix} q_h . dx^h & p^i{}_h . dx^h \\ m_{jh} . dx^h & \Gamma^i{}_{jh}\, dx^h \end{pmatrix}$$

où q_h , m_{jh} , $p^i{}_h$ désignent un vecteur et deux tenseurs, tandis

---

* Théorie globale des connexions , Dunod Paris

que Γ^{i}_{jh} définit une connexion linéaire sur V_n, pour les transformations considérées dont nous cherchons une interprétation géométrique.

Pour ces transformations, nous indiquons les relations qui lient le tenseur de courbure de V_{n+1} et celui de V_n. Nous remarquons enfin qu'aux matrices $(\omega^{\alpha}_{\beta})$ correspondent biunivoquement un vecteur, une connexion affine et une connexion coaffine dont les géodésiques ne semblent pas avoir un sens physique simple dans les applications que nous étudierons.

Dans le Chapitre II nous rappelons les principes fondamentaux de la théorie d'Einstein-Schrödinger, puis ceux de la théorie de Bonnor et de la théorie linéaire générale de Mme M.A. Tonnelat. Les remarques géométriques faites dans le Chapitre I permettent d'étendre la théorie unitaire asymétrique en plongeant l'espace V_4 dans une variété V_5 munie d'un tenseur fondamental et d'une connexion linéaire asymétrique. On peut ainsi ajouter au lagrangien habituel $R_{ij}.g^{ij}.\sqrt{-g}$ des termes supplémentaires qui proviennent du tenseur de courbure de V_5.

Nous discutons ensuite cette extension de la théorie suivant les conditions imposées à q_h, m_{jh} et p^{i}_{h} et nous retrouvons dans des cas particuliers la théorie d'Einstein-Schrödinger celle de Mme M.A. Tonnelat et celle de Bonnor qui prend un caractère unitaire.

Puis nous cherchons à construire un lagrangien capable de donner des équations du champ contenant un tenseur d'impulsion-énergie du type matière pure-champ électromagnétique. Les trois premiers lagrangiens obtenus doivent être abandonnés car

ils conduisent à définir un vecteur potentiel proportionnel au vecteur vitesse unitaire. Les deux suivants donnent des équations du champ peu satisfaisantes. Le dernier semblait présenter quelque intérêt.

Le Chapitre III étudie les identités de conservation. Nous montrons d'abord que notre extension de la théorie asymétrique conduit uniquement aux identités de conservation classiques lorsque les équations de liaison d'Einstein sont vérifiées $D_h g^{ij}_{+-} = o$, $\partial_i \mathcal{G}^{ij}_{\vee} = o$. Pour un lagrangien de la forme $H_{ij}\,\mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}$ où H_{ij} est un tenseur quelconque dépendant des coefficients Γ^{h}_{pq} de la connexion et de leurs dérivées premières ainsi que des variables ρ , A_i.. tandis que la densité scalaire $\mathcal{L}$ dépend de $(g^{ij}, \rho , A_i...)$, nous montrons que les identités de conservation ont toujours la même forme que les identités classiques, lorsque toutes les équations de liaison relatives à Γ^{h}_{pq} , ρ , A_i... sont vérifiées, le tenseur de Ricci R_{ij} étant remplacé par $H_{ij} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{ij}}$ ou par H_{ij} .
Nous donnons enfin deux définitions du tenseur d'impulsion-énergie et nous déduisons des résultats précédents les conditions de conservation de ces tenseurs.

Dans le Chapitre IV, nous cherchons, par une méthode d'approximations successives, les équations approchées de la dernière des extensions de la théorie que nous avons obtenue au Chapitre II. En choisissant un tenseur symétrique quelconque mais peu différent de h_{ij} nous montrons que les équations de conservation du tenseur d'impulsion-énergie se réduisent à des identités. Lorsqu'on prend le tenseur $h^{ij}\sqrt{\frac{h}{g}}$ comme tenseur métrique, ce résultat négatif s'explique et s'étend à toutes les théo-

ries du type étudié. Les généralisations proposées ne peuvent donc conduire aux équations du mouvement par la méthode du tenseur d'énergie lorsque toutes les équations du champ sont satisfaites. (Mme M.A. Tonnelat a trouvé des équations du mouvement satisfaisantes par la méthode du tenseur d'énergie sans introduire de termes phénoménologiques, mais en supposant que les équations antisymétriques du champ ne sont pas vérifiées.*)

Cet échec nous conduit à étudier la théorie de Bonnor. Nous prouvons que les équations du champ sont compatibles et nous obtenons, par la méthode de l'hamiltonien, une solution statique à symétrie sphérique ($g_{\vee}^{23} = o \quad g_{\vee}^{14} \neq o$) qui généralise celle de Reissner et Nordström. Puis nous donnons une généralisation du théorème de Birkhoff et une définition du courant et de la charge.

Dans le Chapitre V nous étudions, en nous limitant au cas statique, la question des solutions partout régulières, solutions qui d'après Einstein pourraient permettre d'obtenir des équations du mouvement satisfaisantes pour des particules chargées. Une difficulté qui se présente à la fin de la démonstration nous a empêché de généraliser un théorème de MM. Racine et Lichnerowicz et de conclure à l'inexistence de solutions partout régulières qui ne sont pas localement euclidiennes. Une généralisation du théorème de Gauss a été établie pour toutes les extensions de la théorie asymétrique dans lesquelles les équations d'Einstein sont vérifiées, mais les résultats qu'on en déduit sur les singularités du champ en Relativité Générale n'ont pu être généralisés.

---

* C.R. Acad. Sc. 251, 1960, 2892-94

Dans le dernier Chapitre nous avons étudié l'effet gravitationnel de spin. Les identités du Chapitre III et un calcul de A. Papapetrou montrent que les particules d'épreuve sans spin, de petites dimensions, placées dans un champ gravitationnel de spin décrivent des géodésiques de la métrique définie par le tenseur $h^{ij} = g^{ij}$. On peut définir pour ces particules une masse conservative qui se réduit dans un cas particulier à la masse définie par Mme F. Hennequin. Les identités du Chapitre III montrent que cette loi géodésique ne peut être modifiée par un changement du lagrangien de la théorie.

Des conclusions et une bibliographie terminent notre travail.

o
o o o

Il me reste,pour terminer cette introduction , à exprimer ma respectueuse gratitude à mes Maîtres .

M. Lichnerowicz m'a initié aux théories relativistes et a guidé très aimablement mes premiers pas dans la recherche .

Mme M.A. Tonnelat n'a cessé de me prodiguer avec beaucoup de bienveillance ses conseils et ses encouragements .

Je tiens à leur exprimer ici ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à remercier M.Papapetrou qui m'a accordé de nombreux entretiens et qui m'a fait bénéficier de son expérience et de ses conseils , M. Costa de Beauregard qui m'a indiqué un sujet de recherche , ainsi que M. Kichenassamy avec qui j'ai eu de nombreuses et amicales discussions .

Je remercie enfin Mme Choquet-Bruhat de l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant très aimablement de faire partie du jury.

Notations et symboles .

Nous utiliserons , en règle générale, les notations de Mme M.A. Tonnelat.

V_n désigne une variété différentiable à n dimensions ,

et (x^i) un système de coordonnées locales de cette variété.

Les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, 4,

les indices latins minuscules prennent les valeurs 1, 2, 3, 4 ,

tandis que les indices latins majuscules prennent les valeurs 1, 2, 3 . Dans tous les cas x^4 désigne la variable temporelle.

Le tenseur fondamental défini sur V_n est désigné par g_{ij}

"$\underline{\quad}$" est le symbole de symétrisation des tenseurs et

"$\vee$" le symbole d'antisymétrisation.

Une même lettre désigne les composantes covariantes d'un tenseur, le déterminant que forment ces composantes et le tenseur associé au tenseur considéré .

Ainsi nous posons :

$g_{ij} \cdot g^{ih} = g_{ji} \cdot g^{hi} = \delta^h_j \qquad g = \text{dét } g_{ij}$

$\gamma_{ij} = g_{\underline{ij}} \qquad \chi_{ij} \cdot \gamma^{ih} = \delta^h_j \qquad \gamma = \text{dét } \gamma_{ij}$

$\varphi_{ij} = g_{i \vee j} \qquad f_{ij} \cdot \varphi^{ih} = \delta^h_j \qquad \varphi = \text{dét } \varphi_{ij}$

$h^{ij} = g^{\underline{ij}} \qquad h_{ij} \cdot h^{ih} = \delta^h_j \qquad h = \text{dét } h_{ij}$

$f^{ij} = g^{ij}_{\vee} \qquad f_{ij} \cdot f^{ih} = \delta^h_j \qquad f = \text{dét } f_{ij}$

Les Γ_{ij}^{h} sont les coefficients d'une connexion linéaire quelconque . $\Gamma_{i} = \Gamma_{ih}^{h}$ est le vecteur de torsion de cette connexion.

Les $L_{i}{}^{h}{}_{j}$ désignent les coefficients d'une connexion linéaire dont le vecteur de torsion L_{i} est nul. ∂_{j} est l'opérateur de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x^{j}}$

Le tenseur de courbure de cette connexion est défini par :

$$R^{i}{}_{j\,,\,pq} = \partial_{p}\Gamma_{jq}^{i} - \partial_{q}\Gamma_{jp}^{i} + \Gamma_{jq}^{h}\Gamma_{hp}^{i} - \Gamma_{jp}^{h}\Gamma_{hq}^{i}$$

et le tenseur de Ricci s'obtient par la contraction des indices i et p .

$$R_{jq} = \partial_{i}\Gamma_{jq}^{i} - \partial_{q}\Gamma_{ji}^{i} + \Gamma_{jq}^{h}\Gamma_{hi}^{i} - \Gamma_{ji}^{h}\Gamma_{hq}^{i}$$

Les notations relatives aux opérateurs de dérivation covariantes et aux tenseurs de Ricci associés aux connexions $\left\{{}_{j\,h}^{i}\right\}$, $\Gamma_{j\,h}^{i}$, $L_{j}{}^{i}{}_{h}$ sont résumées par le tableau suivant :

Connexion	$\left\{{}_{j\,h}^{i}\right\}$	$\Gamma_{j\,h}^{i}$	$L_{j}{}^{i}{}_{h}$
Opérateur de dérivation covariante	∇_{i}	;	D_{i}
Tenseur de Ricci	G_{ij}	R_{ij}	W_{ij}

Le tenseur d'Einstein relatif au tenseur métrique a_{ij} est :

$$S_{ij} = G_{ij} - \frac{1}{2}\, a_{ij}\, G_{pq}\, a^{pq}$$

où G_{ij} est le tenseur de Ricci de la connexion $\left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}$ formé à l'aide du tenseur métrique a_{ij} .

Enfin nous utiliserons la convention d'Einstein .

C H A P I T R E I

ESPACES FIBRES ET CONNEXIONS

Dans ce Chapitre, nous rappelons les notions fondamentales relatives aux espaces fibrés et aux connexions suivant le livre de M. A. Lichnerowicz [18] , celui de L.P. Eisenhart [7] et les travaux de Mme I. Cattaneo Gasparini [15] [16] et de Mme F. Maurer Tison [22] .

A - ESPACES FIBRES

1. Espace fibré principal

Nous considérons dans ce qui suit, afin de simplifier l'exposé, des variétés différentiables de classe C^∞ et la différentiabilité sera entendue au sens C^∞ .

Une structure d'espace fibré principal différentiable est définie sur une variété différentiable E appelée l'espace fibré, par l'ensemble $E\ (V_n , p , G , \Phi)$ où V_n , espace quotient de E par une relation d'équivalence R , est une variété différentiable de dimension n appelée espace de base, où G est un groupe de Lie appelé groupe structural qui constitue la fibre type, et où Φ est une famille d'homéomorphismes différentiables qui est dite la famille des homéomorphismes locaux .

Cet ensemble vérifie les conditions suivantes

1) G opère sur lui-même par translation à gauche effectivement et différentiablement

2) L'application canonique p de E sur V_n est une application différentiable de rang n qui est appelée la projection.

3) A tout élément φ de Φ correspond un ouvert U de V_n tel que φ, que l'on note φ_U, soit un homéomorphisme différentiable de U x G sur $p^{-1}(U)$.

En outre :

a) Si $x \in U$, et si $g \in G$, on a :

$$(p \circ \varphi_U)(x, g) = x$$

b) A chaque point x de V_n correspond un ensemble $\Phi_x \subset \Phi$ d'homéomorphismes de G sur $F_x = p^{-1}(x)$ que l'on appelle la fibre en x .

Si h_x et k_x appartiennent à Φ_x, il existe un élément g de G tel que $k_x^{-1} \circ h_x$ soit l'automorphisme de la variété G défini par l'élément g opérant à gauche sur ce groupe G .

c) Les ouverts U associés aux éléments de Φ recouvrent V_n .

Pour terminer, il faut définir une relation d'équivalence sur les familles d'homéomorphismes locaux :

Deux familles d'homéomorphismes Φ et Φ' sont équivalentes si leur réunion est encore une famille d'homéomorphismes.

Un point z de E au dessus de x , c'est-à-dire un point tel que

$$pz = x ,$$

peut être défini par :

$$z = h_x(\gamma) \qquad \gamma \in G$$

Sur un espace fibré principal, on peut faire opérer le groupe G par translation à droite.

Par définition, si $g \in G$ et si $z = h_x(\gamma)$, on a :

$$zg = h_x(\gamma g)$$

l'application différentiable de E sur E définie par :

$$z \longrightarrow zg$$

est dite la translation à droite associée à g et se représente par D_g.

2. Espace fibré principal et algèbre de Lie

Soit $E(V_n, G, p, \Phi)$ un espace fibré principal de classe C^∞. Si z est un point de E situé au-dessus de x, désignons par $\ominus_z$ l'espace vectoriel tangent à E en z, et par V_z le sous-espace vectoriel tangent à la fibre en z. Tout vecteur τ de V_z sera dit vertical. D_g conservant la fibre transforme tout vecteur vertical τ en un vecteur vertical $D_g \tau$. L'homéomorphisme h_x^{-1} applique τ sur un vecteur vertical θ_γ tangent en γ à G.

De ce vecteur on déduit un champ de vecteur de G invariant à gauche par la relation :

$$\theta_{g\gamma} = g \cdot \theta_\gamma$$

le vecteur $\theta_e = \lambda$ de ce champ tangent à G en e est un élément de l'algèbre de Lie L de G. qui est dit engendré par τ.

Inversement à tout élément $\lambda \in L$ correspond un champ de vecteurs verticaux.

3. Connexion infinitésimale sur un espace fibré principal.

Une connexion infinitésimale $\mathfrak{h}$ sur l'espace fibré principal E peut recevoir deux définitions équivalentes que nous rappelons brièvement

1) $\mathfrak{h}$ peut être définie par la donnée sur E d'un champ de sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}_z$ de Θ_z satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $\mathfrak{h}_z$ est supplémentaire de V_z

b) $\mathfrak{h}_z$ dépend différentiablement de z

c) $\mathfrak{h}_z$ est invariant par G opérant sur E ce qui se traduit par

$$\mathfrak{h}_{zg} = D_g \mathfrak{h}_z$$

2) $\mathfrak{h}$ peut être définie par la donnée sur E d'une 1-forme ω à valeurs dans L et qui possède les propriétés suivantes :

a) $\omega(\tau)$ est l'élément de L engendré par le vecteur vertical τ. b) ω dépend différentiablement de z

c) $\omega(D_{\xi} z) = (\mathrm{ad}\ j.\ g^{-1}) \cdot \omega(\tau)$.

4. Sections locales

Soit U un voisinage de $V_{n'}$ on appelle section locale une application différentiable μ de U dans $p^{-1}(U)$ telle que

$$p \circ \mu(x) = x.$$

Considérons un recouvrement de V_n par des voisinages U_i et au-dessus de chaque U_i une section locale z_i. Si $x \in U_i \cap U_j$ il existe un élément $g_{ij} \in G$ tel que

$$z_j(x) = z_i(x) \cdot g_{ij}(x) \tag{I.1}$$

A tout vecteur du tangent en x à V_n correspondent des vecteurs dz_i, dz_j, tangents en z_i et z_j à E tels que

$$p\, dz_i = dx \quad ; \quad p\, dz_j = dx$$

et un vecteur dg_{ij} de G en g_{ij} correspond à l'élément $g_{ij}^{-1} \cdot dg_{ij}$ de L. De la relation (I.1) on déduit

$$dz_j = dz_i\, g_{ij} + z_j . g_{ij}^{-1} \cdot dg_{ij} . \tag{I.2}$$

Si l'on pose

$$\omega_j(dx) = \omega\,(dz_j) ,$$

La connexion définit dans chaque U_i une forme ω_i à valeurs dans l'algèbre de Lie L de G, ces formes vérifiant la condition :

$$\omega_j = (\, ad\, j\ g_{ij}^{-1}\ )\ \omega_i + g_{ij}^{-1} \cdot dg_{ij} \quad x \in U_i \cap U_j \tag{I.3}$$

Inversement, on démontre que la connaissance dans un recouvrement de V_n muni de sections locales, d'un ensemble de formes locales ω_i de V_n, à valeurs dans l'algèbre de Lie L de G, détermine sur E une connexion infinitésimale.

5. Tenseurs et formes tensorielles sur E .

Si R(G) est une représentation du groupe structural G dans un espace vectoriel M de dimension finie, on appelle tenseur de type R(G) sur E une application $z \longrightarrow t(z)$ de E dans M telle que

$$t(zg) = R(g^{-1}) \cdot t(z)$$

Une q-forme tensorielle Π sur E à valeurs dans M est dite une q-forme de type R(G) si :

1) $\Pi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q) = 0$ lorsque l'un des vecteurs τ_i est vertical

2) $\Pi(D_g \tau_1, D_g \tau_2, \ldots, D_g \tau_q) = R(g^{-1}) \cdot \Pi(\tau_1, \ldots, \tau_q)$

On démontre que pour un recouvrement de V_n muni de sections locales, un ensemble de formes locales Π_i à valeurs dans M et satisfaisant à

$$\Pi_j = R(g_{ij}^{-1}) \cdot \Pi_i$$

détermine sur E une q-forme tensorielle du type R(G).

6. Différentielle d'une q-forme. Courbure d'une connexion infinitésimale .

On appelle différentielle absolue d'une q-forme Π définie sur E et à valeurs dans M, relativement à une connexion infinitésimale, la (q+1) forme $\nabla \Pi$ à valeurs dans M, définie par

$$\nabla \Pi(\tau_0, \ldots, \tau_q) = d\Pi(\beta_{\tau_0}, \ldots, \beta_{\tau_q})$$

La différentielle absolue de la forme ω de la connexion est une 2-forme tensorielle de type adjoint à valeurs dans L

$$\Omega = D\omega$$

que l'on appelle la forme de courbure de la connexion. On démontre que

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}\left[\omega , \omega\right] .$$

où $\left[\ldots\right]$ est le crochet usuel de formes à valeurs dans une algèbre de Lie

7. Repères et corepères

Considérons une variété différentiable V_n et désignons par T_x et T_x^* ses espaces vectoriels tangents en x .

Un repère R_x d'origine x est une base de T_x c'est à dire un ensemble ordonné de n vecteurs $\vec{e}_i$ linéairement indépendants.

Deux repères $R'_x(\vec{e}_{j'})$ et $R_x(\vec{e}_i)$ se déduisent l'un de l'autre par les relations

$$\vec{e}_{j'} = A^i_{j'}\ \vec{e}_i .$$

ou plus brièvement

$$R'_x = R_x\ A .$$

dans lesquelles $A = (A^i_{j'})$ désigne une matrice régulière arbitraire n x n .

Un corepère est une base de T_x^* c'est à dire un ensemble ordon-

né de n formes linéaires θ^i linéairement indépendantes.

Si $\theta_x(\theta^i)$ et $\theta'_x(\theta j')$ sont les corepères duaux de R^x et de R'^x on a :

$$\theta^i = A^i_{j'}.\ \theta^{j'} \qquad \text{ou} \qquad \theta_x = A \cdot \theta_{x'},$$

Considérons un recouvrement d'une variété V_n par des voisinages ouverts connexes U munis de repère θ^u.

Si $x \in U \cap V$, les corepères θ^U et θ^V définis dans U et V se déduisent l'un de l'autre par les relations

$$\theta^U = A^U_V(x) \cdot \theta^V \tag{1.4}$$

on en déduit que

$$A^V_U \cdot A^U_V = E.$$

Si $x \in U \cap V \cap W$ on obtient

$$A^U_W = A^U_V \cdot A^V_W \ . \tag{I.5}$$

et en désignant par $d\,A^U_V$ la matrice $n \times n$ dont les éléments sont les différentielles des éléments de A^U_V, par Λ_{UV}

$$\Lambda_{UV} = A^V_U \cdot dA^U_V = - d\,A^V_U \cdot A^U_V$$

on obtient par différentiation de (1 . 5) :

$$d\,A^U_W = d\,A^U_V \cdot A^V_W + A^U_V \cdot d\,A^V_W \ . \tag{I.6}$$

8. L'espace fibré principal $E(V_n)$

L'ensemble $E(V_n)$ des repères relatifs aux différents points d'une variété différentiable V_n admet une structure de variété différentiable.
Si (x^α) est un système de coordonnées locales de V_n, nous pouvons définir les coordonnées du repère $R^x \in E(V_n)$ par les coordonnées locales de son origine x, et par la matrice A qui applique sur R^x le repère naturel en x.

La projection p étant l'application de $E(V_n)$ sur V_n qui a un repère R^x fait correspondre son origine x, $E(V_n)$ est un espace fibré principal appelé espace fibré des repères linéaires de V_n. Sa base est V_n, son groupe structural G est le groupe linéaire $GL(n, R)$. La fibre type peut être identifiée à ce groupe qui agit alors sur lui-même par translation à gauche.

9. Connexion linéaire

Une connexion linéaire sur V_n est une connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $E(V_n)$. Le groupe G peut être réalisé au moyen des repères de l'espace vectoriel tangent T_x lorsqu'un repère R^x de $E(V_n)$ est choisi. Tout élément λ de l'algèbre de Lie de G peut être défini par $R^x \lambda$ et peut être représenté par une matrice régulière $n \times n$.

Au point R^x de $E(V_n)$, la forme ω de la connexion peut être définie par une matrice $n \times n$

$$\omega = (\omega^i_j)$$

dont les éléments sont des formes de Pfaff au point R^x de $E(V_n)$

Pour un recouvrement de V_n par des voisinages ouverts U munis de repères, une connexion linéaire peut être définie par un ensemble de formes locales ω_U, à valeurs dans l'algèbre de Lie de G, et qui satisfont pour $x \in U \cap V$ à la relation (I , 3)

Ces formes peuvent être représentées par des matrices n x n notées ω_U et dont les éléments sont des formes de Pfaff sur U. Si

$$R\,{}^{x}_{V} = R\,{}^{x}_{U} \cdot A\,{}^{U}_{V}\ (x)$$

La condition (I , 3) se traduit par la relation de cohérence :

$$(I.7)\quad \omega_V = A\,{}^{U}_{V} \cdot \omega_U \cdot A\,{}^{U}_{V} + A\,{}^{U}_{V} \cdot d\,A\,{}^{U}_{V} \quad (x \in U \cap V)$$

10. Différentielle absolue dans une connexion linéaire .

Un tenseur t de type R(G) , à valeurs dans un espace vectoriel M , définit dans chaque voisinage U d'un recouvrement de V_n une fonction $t_U(x)$ à valeurs dans M , et telle que, si $x \in U \cap V$, on ait :

$$t_V(x) = R\,(A\,{}^{U}_{V})\,.\,t_U(x)$$

Si $\tilde{R}$ est la représentation de l'algèbre de Lie L de G induite par R , on démontre que :

$$dt_V + \tilde{R}\,(\omega_V)\,.\,t_V = R\,(A\,{}^{V}_{U}).(dt_U + \tilde{R}\,(\omega_U)\,t_U)$$

La 1 forme ∇t sur $E(V_n)$ à valeurs dans M

$$\nabla t = dt + \tilde{R}\,(\omega)\,.\,t$$

est une 1-forme de type $R(G)$ appelée différentielle absolue du tenseur t .

11. Torsion et courbure d'une connexion linéaire

Si Φ et Ψ sont des matrices n x n dont les éléments Φ^{i}_{j} et Ψ^{i}_{j} sont des formes différentielles locales, nous conviendrons de définir les matrices $\Phi \wedge \Psi$ et $d\Phi$ par :

$$\Phi \wedge \Psi = (\Phi^{i}_{j} \wedge \Psi^{j}_{h})$$

$$d\Psi = (d\Psi^{h}_{i})$$

où d désigne une différentielle extérieure et où la convention d'Einstein s'applique aux indices j .

a) En différentiant extérieurement les deux membres de (I.4) on démontre que les matrices à une ligne dont les éléments sont les 2-formes

$$\Sigma^{U} = d\theta^{U} + \omega_{U} \wedge \theta^{U} \qquad (I.8)$$

satisfont à $\Sigma^{V} = A^{V}_{U} . \Sigma^{U}$ $\quad x \in U \cap V$.

et définissent par conséquent sur $E(V_n)$ une deux-forme vectorielle contravariante appelée forme de torsion de la connexion.

b) En différentiant extérieurement les 2 membres de la relation (I-7) on établit que les matrices n x n dont les éléments sont les deux formes

(I-9) $$\Omega_u = d\omega_u + \omega_u \wedge \omega_u \qquad x \in U$$

satisfont à

$$\Omega u = A^U_V \cdot \Omega_u \cdot A^U_V$$

et définissent par conséquent sur $E(V_n)$ une deux-forme tensorielle de type (I.1) appelée forme de courbure de la connexion.

12. Formules explicites en repères naturels

Si dans chaque voisinage U, nous adoptons comme corepère θ^U_x le repère formé par les différentielles (dx^i) des coordonnées locales (x^i), la connexion est dite rapportée aux coordonnées locales.

Les matrices A^U_V et A^V_U ont alors pour éléments

$$A^i_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \qquad A^{j'}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Les éléments ω^i_j des matrices de la connexion ω_U vérifient alors la relation :

(I.10) $$\omega^{h'}_{t'} = A^{h'}_i \cdot \omega^i_j \cdot A^J_{t'} + A^{h'}_i \cdot d A^i_{t'}$$

Les coefficients Γ^i_{jh} de la connexion, définis par :

(I.11) $$\omega^i_j = \Gamma^i_{jh} \, d x^h$$

se transforment dans un changement de coordonnées locales selon la loi :

$$(I.12)\qquad \Gamma^{h'}_{s't'} = \Gamma^{h}_{i\,j} \cdot A^{i}_{s'} \cdot A^{j}_{t'} \cdot A^{h'}_{\ \ i} + A^{h'}_{\ \ i} \cdot \partial_{t'} A^{i}_{s'} \quad ,$$

En coordonnées locales, la forme de torsion devient :

$$\Sigma^{i} = \omega^{i}_{j}\, dx^{j} = + \Gamma^{i}_{j\,h} \cdot d x^{h} \wedge d x^{j}$$

Le tenseur de torsion est défini par

$$S_{j\,h}^{\ \ i} = \Gamma^{i}_{j\,h}$$

et le vecteur de torsion $S_{j\,i}^{\ \ i}$ par

$$\Gamma_{j} = \Gamma^{i}_{j\,i}$$

Nous posons pour un vecteur contravariant A^{i} :

$$A^{i}_{+\,;\,h} = \partial_h A^{i} + A^{j} \Gamma^{i}_{j\,h}$$

$$A^{i}_{-\,;\,h} = \partial_h A^{i} + A^{j} \Gamma^{i}_{h\,j}$$

et pour un vecteur covariant A_i

$$A_{i\,;\,h}^{+} = \partial_h A_i - A_t \Gamma^{t}_{i\,h}$$

$$A_{i\,;\,h}^{-} = \partial_h A_i - A_t \Gamma^{t}_{h\,i}$$

La formule

$$(I.13)\qquad \Omega^{i}_{j} \equiv 1/2 \cdot R^{i}_{\ j,h\,k} \cdot d x^{h} \wedge d x^{k}$$

permet de définir le tenseur de courbure $R^{i}_{\ j,h\,k}$ dont l'expression en coordonnées locales est :

$$(I.14)\quad R^{i}_{j,hk} = \partial_h \Gamma^{i}_{jk} - \partial_k \Gamma^{i}_{jh} + \Gamma^{s}_{jk}\cdot\Gamma^{i}_{sh} - \Gamma^{s}_{jh}\cdot\Gamma^{i}_{sk}$$

Enfin le tenseur de Ricci de la connexion est défini par :

$$(I\text{-}15)\quad R_{jk} = R^{i}_{j,ik} = \partial_i \Gamma^{i}_{jk} - \partial_k \Gamma^{i}_{ji} + \Gamma^{s}_{jk}\cdot\Gamma^{i}_{si} - \Gamma^{s}_{ji}\cdot\Gamma^{i}_{sk}$$

13. <u>L'espace fibré des repères affines [15] [16] [18]</u>

Désignons par T_x l'espace tangent au point x à une variété V_n Un repère affine S relatif au point x est l'ensemble d'une base R et d'un vecteur $\vec{\xi}$ de T_x. Ce vecteur $\vec{\xi}$ définit un point de T_x qui est dit l'origine de S .

Si S est noté sous la forme d'une matrice à une colonne et n + 1 lignes $S = \begin{pmatrix} \xi \\ R \end{pmatrix}$, on passe d'un repère S à un repère

$S' = \begin{pmatrix} \xi' \\ R' \end{pmatrix}$ par la relation matricielle

$$S' = S\,B$$

avec $$B = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad R' = A\,R$$

où A désigne la matrice qui transforme R en R', et v la matrice à une ligne qui représente par rapport au repère R , le vecteur $\vec{\xi'} - \vec{\xi}$

L'ensemble $\mathcal{E}(V_n)$ des repères affines aux différents points x de V_n admet une structure de variété différentiable:

Les coordonnées d'un élément S^n de $\mathcal{E}(V_n)$ sont les coordonnées (x^i) du point x et la matrice B qui définit S par rapport au repère naturel en x considéré comme repère affine d'origine x .

(V_n) est un espace fibré principal dont la base est V_n, dont le groupe structural est le groupe affine à n dimensions et dont la projection p fait correspondre à tout repère S^x le point x .

Une connexion affine sur V_n est une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}(V_n)$. Elle peut être définie par la donnée, dans chaque voisinage U d'un recouvrement de V_n , d'une matrice Π_U .

$$\Pi_U = \begin{pmatrix} 0 & \Pi^i_o \\ 0 & \Pi^i_j \end{pmatrix} \tag{I-16}$$

dont les éléments sont des 1-formes différentielles sur U et qui doivent vérifier pour x U V la relation

$$\Pi_V = B^{-1U}_{\ V} \cdot \Pi_U \cdot B^U_V + B^{-1U}_{\ V} \cdot d\, B^U_V \tag{I-17}$$

où B^U_V est la matrice de passage du repère affine S_U au repère affine S_V

$$B^U_V = \begin{pmatrix} 1 & v^U \\ 0 & A^U_V \end{pmatrix} \tag{I-18}$$

v_V^U désigne la matrice à une ligne qui représente par rapport à S_U le vecteur $\vec{\xi}^V - \vec{\xi}^U$.

On démontre qu'à toute connexion linéaire définie par les matrices ω_U sur les voisinages U d'un recouvrement de V_n, on peut associer les connexions affines définies par

$$\Gamma_U = \begin{pmatrix} 0 & \Phi^U + \nabla \xi^U \\ 0 & \omega_U \end{pmatrix} \tag{I.19}$$

où Φ^U est une i-forme vectorielle contravariante sur U, ∇ l'opérateur de dérivation absolue associée à ω, et ξ^U le vecteur qui caractérise les repères affines de U.

14. L'espace fibré des repères coaffines. Connexions coaffines [22]

T_x^* désigne l'espace vectoriel tangent en X à V_n et dont les éléments sont les formes linéaires en X.

Un corepère affine C est l'ensemble d'une base Θ de T_x^* et d'une forme linéaire f de T_x^*.

Si C est représenté par une matrice à une ligne

$$C = (f, \Theta) ,$$

on passe d'un corepère affine C à un corepère affine C' en multipliant la matrice C à gauche par la matrice

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cdot & A \end{pmatrix} \tag{I.20}$$

où A désigne la matrice de passage de Θ à Θ et Ψ la matrice à une colonne formée par les composantes de f' - f évaluées par rapport à Θ .

L'ensemble $\xi^{*}(V_n)$ des corepères affines aux différents points de V_n est un espace fibré principal dont la base est V_n, dont le groupe structural est le groupe formé par les matrices B^{*} qui est isomorphe au groupe affine de l'espace à n dimensions et dont la projection p fait correspondre le point X à tout corepère S^X de $\xi^{*}(V_n)$.

Une connexion coaffine est une connexion infinitésimale sur $\xi^{*}(V_n)$.

Une telle connexion est définie par la donnée, dans chaque voisinage U d'un recouvrement de V_n, d'une matrice

$$\text{(I.21)} \qquad \Pi^{*}_{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_u & \omega_u \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont des 1-formes différentielles sur U et qui vérifient pour $X \in U \cap V$, les relations :

$$\text{(I.22)} \qquad \Pi^{*}_{v} = B^{*}_{u}{}^{v} \cdot \Pi^{*}_{u} \cdot B^{*-1}_{u}{}^{v} + d B^{*}_{u}{}^{v} \cdot B^{*-1}_{u}{}^{v}$$

avec

$$(I.23)\qquad C^{*v} = B^{*v}_{u} \cdot C^{u} \qquad \text{et} \qquad B^{*v}_{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \psi^{v}_{u} & A^{v}_{u} \end{pmatrix}$$

on démontre qu'à toute connexion linéaire, définie par les matrices ω_u sur les voisinages U d'un recouvrement de V_n, on peut associer les connexions coaffines définies par

$$(I.24)\qquad \prod^{*}_{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla f_u + m_u & -\omega_u \end{pmatrix}$$

où m_u est une 1-forme vectorielle covariante sur U

∇ l'opérateur de dérivation absolue associé à ω et f_u la forme linéaire qui caractérise les corepères affines de U .

B. GEOMETRIE D'UNE HYPERSURFACE DE V_{n+1} [7] .

Nous allons rappeler dans les paragraphes qui suivent les propriétés d'une sous-variété à n dimensions V_n d'une variété différentiable V_{n+1} à (n+1) dimensions munie d'une connexion linéaire asymétrique $\Gamma^{h}_{i\,j}$.

Les indices grecs prendront les valeurs: 0 , 1 , 2 ,...n .
Les indices latins minuscules prendront les valeurs :
1 , 2 , 3 ,... n .

1) Les vecteurs N^{α} et N_{α}

a) Si V_{n+1} est rapportée à un système de coordonnées (y^{α}), et si $f(y^0 , y^1 , .. , y^n)$ est une fonction irréductible,

l'équation :

$$f(y^0 , y^1 , \dots , y^n) = 0$$

représente localement une hypersurface de V_{n+1} .

Le changement de coordonnées :

(I.25) $x^0 = f(y^0 , y^1 , .. , y^n) , \quad y^i = f^i(y^0, y^1 , .., y^n) ,$

où les fonctions f^i sont des fonctions arbitraires soumises à la condition que le jacobien des fonctions f^0 et f^i soit différent de zéro, définit un système de coordonnées (x^α) dans lequel V_n a pour équatiom :

$$x^0 = 0 .$$

En chaque point P de V_n , la relation :

$$\partial_\alpha f \, . \, dy^\alpha = 0 \qquad (\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha})$$

prouve que tout vecteur contravariant tangent à V_n est pseudo-orthogonal au vecteur covariant :

(I.26) $$N_\alpha = \partial_\alpha f = \partial_\alpha x^0$$

qui est appelé le vecteur covariant pseudo-normal à V_n en P .

Ce vecteur est indépendant des f^i.

b) Les courbes qui dans le système de coordonnées (x^α) ont pour équation :

$$x^i = 0 ,$$

s'appellent les transversales de l'hypersurface V_n .
Elles constituent une congruence à n paramètres qui dépend du choix des fonctions f^i .

Le vecteur contravariant N^{α} qui a pour composantes :

$$(I.27) \qquad N^{\alpha} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{o}}$$

est tangent aux transversales . Il dépend du choix des fonctions f^{i} .

En chaque point de V_n , les vecteurs N^{α} et N_{α} vérifient la relation :

$$(I.28) \qquad N^{\alpha} \cdot N_{\alpha} = 1$$

Dans le système de coordonnées (x^{α}) , ces vecteurs ont pour composantes :

$$(I.29) \qquad N^{o} = 1 \ , \ N^{i} = 0 \ , \ N_{o} = 1 \ , \ N_{i} = 0$$

2) Les transformations qui conservent les vecteurs N^{α} sur V_n

Considérons dans l'espace V_{n+1} rapporté à un système de coordonnées (x^{α}) , l'hypersurface V_n dont l'équation est : $x^{o} = 0$

En chaque point P de cette hypersurface , le vecteur N^{α} tangent à la transversale de V_n qui passe par P a pour composantes :

$$N^{i} = 0 \qquad , \qquad N^{o} = 1$$

Effectuons le changement de coordonnées :

$$(I.30) \qquad x'^{i} = F^{i}(x^{o} , x^{j}) \ , \ x'^{o} = F^{o}(x^{o} , x^{j})$$

les fonctions F et F^{i} étant des fonctions de classe C^{2} dont le jacobien n'est pas nul .

Nous supposons que

$$F^{o}\ (\ o\ ,\ x^{j}\ )\ =\ o$$

afin que l'équation de V_4 soit $x'^{o} = o$ dans le système (x'^{α}) .

D'après (I.27) , le vecteur N^{α} a pour composantes dans le système (x'^{α}) :

$$N'^{i} = N^{\alpha}\,\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{o}} = \frac{\partial F^{i}}{\partial x^{o}}$$

$$N'^{o} = N^{\alpha}\,\frac{\partial x'^{o}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial x'^{o}}{\partial x^{o}} = \frac{\partial F^{o}}{\partial x^{o}}$$

Mais le changement de coordonnées (I.30) change la congruence des transversales de V_n , et par conséquent remplace le champ des vecteurs N^{α} par un autre champ de vecteurs $\overline{N}^{\alpha}$ dont les composantes dans le système (x'^{α}) sont :

$$\overline{N}'^{i} = 0 \quad , \quad \overline{N}^{o} = 1$$

Pour que les transformations considérées laissent invariant, sur V_n , chacun des vecteurs N^{α} , il faut et il suffit que :

$$\lim_{x^{o}\to o}\ \frac{\partial F^{i}}{\partial x^{o}} = o \quad , \quad \lim_{x^{o}\to o}\ \frac{\partial F^{o}}{\partial x^{o}} = 1$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial F^{i}}{\partial x^{o}}\ (\ x^{o}\ ,\ x^{j}\ ) = h^{i}\ (\ x^{o}\ ,\ x^{j}\ )$$

$$\frac{\partial F^{o}}{\partial x^{o}}\ (\ x^{o}\ ,\ x^{j}\ ) = h^{o}\ (\ x^{o}\ ,\ x^{j}\ ) + 1$$

où h^i et h^o sont des fonctions de classe C^1 qui s'annulent pour $x^o = 0$. On en déduit que :

$$F^i = f^i(x^j) + A^i(x^o, x^j)$$
$$F^o = x^o + A^o(x^o, x^j)$$

où f^i , A^i , A^o sont des fonctions de classe C^2 , En outre f^i est arbitraire, tandis que A^i et A^o sont soumises aux conditions ;

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^o}(o, x^j) = o \quad , \quad \frac{\partial A^o}{\partial x^o}(o, x^j) = o$$

Puisque f^i est arbitraire , on peut supposer que :

$$A^i(0^o, x^j) = o$$

Pour que l'équation de l'hypersurface V_4 dans le système (x'^{α}) s'écrive :

$$x'^o = o \ ,$$

il faut supposer que :

$$A^o(o, x^j) = o$$

La formule de Taylor donne alors :

$$A^i(x^o, x^j) = (x^o)^2 \cdot B^i(x^o, x^j)$$
(I.31)
$$A^o(x^o, x^j) = (x^o)^2 \cdot B^o(x^o, x^j)$$

où B^i et B^o sont des fonctions arbitraires telles que le jacobien de la transformation soit différent de zéro . Ainsi :

Etant donné dans un espace V_{n+1} à (n+1) dimensions rapporté à un système de coordonnées (x^{α}) , une hypersurface dont l'équation est $x^{o} = o$, les transformations de coordonnées les plus générales de V_{n+1} qui transforment l'équation de V_n en : $x'^{o} = o$ et qui laisse invariant le champ de vecteurs N^{α} tangent en chaque point de V_n à la transversale de V_n qui passe par ce point sont données par les relations

$$\begin{aligned} x'^{o} &= x^{o} + (x^{o})^{2} \, . \, B^{o} (x^{o} , x^{j}) \\ x'^{i} &= f^{i} (x^{j}) + (x^{o})^{2} \, . \, B^{i} (x^{o} , x^{j}) \end{aligned} \qquad \text{(I.32)}$$

On pourrait se limiter aux transformations de coordonnées de V_{n+1} de la forme :

$$x'^{o} = x^{o} \quad , \quad x'^{i} = f^{i} (x^{j}) \qquad \text{(I.33)}$$

qui constituent un cas particulier des transformations (I.32) Ces dernières se réduisent aux transformations (I.33) lorsque $x^{o} = o$

Les transformations (I.33) sont caractérisées par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & \dfrac{\partial f^{i}}{\partial x^{j}} \end{pmatrix}$$

qui constituent un groupe isomorphe au groupe $Gl (n , R)$

Ces transformations sont les transformations les plus générales de V_{n+1} qui transforment l'équation de l'hypersur-

face $x^0 = a$ en $x'^0 = a$ et qui conservent dans son ensemble la congruence des transversales de V_n définie par le système de coordonnées (x^α).
Elles font jouer un rôle identique à toutes les hypersurfaces $x^0 = a$ tandis que les transformations (I.32) donnent à l'hypersurface $x^0 = o$ un rôle particulier.

3) Tenseurs dérivés

a) Tenseurs covariants. Si a^i et b^i sont les composantes dans les systèmes de coordonnées (y^α) et (x^α) d'un vecteur covariant de V_{n+1}, nous avons :

$$b_i = a_\alpha \cdot \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \quad . \tag{I.34}$$

Sur V_n, les fonctions a_α sont des fonctions de $x^1, .., x^n$ et pour chaque valeur de α, les $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$ constituent les composantes d'un vecteur covariant de V_n. Les b_i sont les composantes d'un vecteur covariant de V_n qui est dit le vecteur dérivé du vecteur a_α de V_{n+1}.

Plus généralement, si $a_{1, .., p}$ sont les composantes dans le système des (y^α) d'un tenseur de V_{n+1}, les fonctions

$$b_{i_1 .. i_p} = a_{1 \cdots p} \cdot \frac{\partial y^1}{\partial x^{i_1}} \cdots \cdot \frac{\partial y^p}{\partial x^{i_p}}$$

constituent les composantes d'un tenseur de V_n qui est dit le

tenseur dérivé du tenseur $a_{1 \ldots p}$ de V_{n+1} . Ce tenseur est indépendant du choix du vecteur N^{α} . On peut remarquer que les $b_{i_1 \ldots i_p}$ ont un caractère tensoriel pour les transformations de la forme

$$x^i = F^i (x'^0, .., x'^n) , \quad x^0 = x'^0 F^0 (x'^0 , .. x'^n)$$

où F et ses dérivées premières sont finies pour $x'^0 = 0$, le jacobien des F^i , $x'^0 F^0$ n'étant pas nul .

b) tenseurs contravariants

Si A^{α} et B^{α} sont les composantes dans les systèmes de coordonnées (y^{α}) et (x^{α}) d'un vecteur contravariant de V_{n+1} , nous avons :

$$B^i = A^{\alpha} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^{\alpha}} \quad . \tag{I.36}$$

Sur V_n , les fonctions A^{α} sont des fonctions de x^1 , ..., x^n, et pour chaque valeur de α les dérivées $\frac{\partial x^i}{\partial y^{\alpha}}$ constituent les composantes d'un vecteur contravariant de V_n , pour les transformations (I.32)

En effet on a :

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial y^{\alpha}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^{\alpha}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial x^0}{\partial y^{\alpha}}$$

et d'après (I.32) :

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{0}} = 2\, x^{0}\, B^{0} + (x^{0})^{2}\, \frac{\partial B^{0}}{\partial x^{0}} \quad ; \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial f^{i}}{\partial x^{j}} + (x^{0})^{2}\, \frac{\partial B^{i}}{\partial x^{j}}$$

Il en résulte que, sur V_n :

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{0}} = 0 \quad ; \qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial f}{\partial x^{j}}$$

et

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial y^{\alpha}} = \frac{\partial f^{i}}{\partial x^{j}} \cdot \frac{\partial x^{j}}{\partial y^{\alpha}}$$

Nous dirons que le vecteur B^{i} est le vecteur de V_n dérivé du vecteur A^{α} de V_{n+1}.

Le vecteur de V_{n+1} qui dans le système de coordonnées (x^{α}) possède les composantes :

$$B^{i} = A^{\alpha} \cdot \frac{\partial x^{i}}{\partial y^{\alpha}} \quad , \qquad B^{0} = 0$$

a dans le système de coordonnées (y^{β}) les composantes :

$$\overline{B}^{\beta} = B^{i} \cdot \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}} = A^{\alpha} \cdot \frac{\partial x^{i}}{\partial y^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}} = A^{\alpha} \left(\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{0}}{\partial y^{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{0}} \right)$$

d'où l'on tire :

$$\overline{B}^{\beta} = A^{\alpha} \left(\delta^{\beta}_{\alpha} - N^{\beta} N_{\alpha} \right)$$

Le vecteur de V_n dérivé d'un vecteur de V_{n+1} dépend donc du choix de N^α, excepté dans le cas où A^α est tangent à V_n

Plus généralement, si $A^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ sont les composantes, dans le système (y^α) d'un tenseur de V_{n+1}, les fonctions :

$$B^{i_1 \cdots i_p} = A^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{\alpha_p}} ,$$

calculées sur V_n, sont, pour les transformations (I.32), les composantes d'un tenseur de V_n.

Ce tenseur $B^{i_1 \cdots i_p}$ est dit le tenseur de V_n, dérivé du tenseur $A^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ de V_{n+1}.

c) Si les systèmes (x^α) et (y^β) sont identiques, les composantes A^i_{jk} d'un tenseur $A^\alpha_{\beta\gamma}$ de V_{n+1} constituent, pour les transformations (I.32), les composantes du tenseur de V_n dérivé du tenseur $A^\alpha_{\beta\gamma}$. Ce tenseur dérivé A^i_{jk} dépend du choix des N^α sur V_n.

4. Connexion induite

Si $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et $\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda}$ sont les coefficients d'une connexion linéaire de V_{n+1}, respectivement dans les systèmes de coordonnées (x^α) et (y^α), on a :

$$(I.37) \quad \Gamma^h_{ij} = \left(\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\lambda} \cdot \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^i \cdot \partial x^j} \right) \cdot \frac{\partial x^h}{\partial y^\mu}$$

Mais $\frac{\partial x^h}{\partial y^\mu}$ est le mineur normalisé de $\frac{\partial y^\mu}{\partial x^h}$ dans le déter-

minant $\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$

Il en résulte que la dérivée $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\lambda}}$ dépend de N^{α}.

Sur V_n, les Γ_{ij}^{h} dépendent donc du choix du vecteur N^{α} ;

Mais, si $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et $\Gamma_{\rho\lambda}^{'\mu}$ sont les coefficients d'une connexion linéaire de V_{n+1}, respectivement dans le système (x^{α}) et dans le système (x'^{β}) défini par la relation (I.32), nous obtenons :

$$(I.38)\qquad \Gamma_{ij}^{h} = \left(\Gamma_{pq}^{'r} \cdot \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x'^{q}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial^2 x'^{r}}{\partial x^{j}\,\partial x^{i}}\right) \cdot \frac{\partial x^{h}}{\partial x'^{r}} ,$$

car d'après (I.32) les dérivées

$$\frac{\partial^2 x'^{o}}{\partial x^{j}\,\partial x^{i}} \quad , \quad \frac{\partial x'^{o}}{\partial x^{i}} \quad , \quad \frac{\partial x^{h}}{\partial x'^{o}} \qquad \text{sont nulles sur } V_n .$$

Il en résulte que pour les transformations (I.32), les Γ_{ij}^{h} et les $\Gamma_{pq}^{'r}$ sont les coefficients d'une même connexion linéaire de V_n.

Cette connexion est appelée la connexion induite sur V_n par la connexion $\Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha}$ de V_{n+1} pour un choix déterminé du vecteur N^{α}.

Pour une transformation générale de la forme (I.35), le second membre de (I.38) contient en effet les termes

$\Gamma'^{\,o}_{p\,q} \dfrac{\partial x'^{p}}{\partial x^{i}} \cdot \dfrac{\partial x'^{q}}{\partial x^{j}} \cdot \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x'^{o}}$ qui dépendent de N^{α} .

De (I.37), il résulte que la partie antisymétrique de la connexion induite est donnée par :

$$\Gamma^{h}_{i\,j} = \overset{=}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\,\gamma} \cdot \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{j}} \cdot \frac{\partial x^{h}}{\partial y^{\alpha}}$$

La partie antisymétrique de la connexion $\Gamma^{h}_{i\,j}$ induite sur V_n par la connexion $\overset{=}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\,\gamma}$ de V_{n+1} pour un choix déterminé du vecteur N^{α}, est le tenseur dérivé sur V_n de la partie antisymétrique de la connexion .

5. Tenseurs dérivés fondamentaux .

a) Désignons par $D_{\beta} N_{\underset{+}{\alpha}}$ le vecteur de V_{n+1} défini par :

$$D_{\beta} N_{\underset{+}{\alpha}} = \partial_{\beta} N_{\alpha} - N_{\tau} \cdot \Gamma^{\tau}_{\alpha\,\beta}$$

Si m_{ij} est le tenseur de V_n dérivé du tenseur $- D_{\beta} N_{\underset{+}{\alpha}}$ de V_{n+1} , nous avons :

$$m_{ij} = - D_{\beta} N_{\underset{+}{\alpha}} \cdot \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{j}} \qquad (I.39)$$

et ce tenseur covariant est indépendant de N^{α} .
Dans le système (x^{α}) , il résulte des valeurs des composantes de N_{α} données par (I.29) que :

$$m_{ij} = \Gamma^{o}_{i\,j} \qquad (I.40)$$

b) Le tenseur N^{α} étant choisi , définissons le tenseur $D_{\beta} N^{\alpha}_{\underset{+}{}}$ par :

$$D_{\beta} N_{+}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\gamma} N_{+}^{\alpha} + N_{+}^{\lambda} \cdot \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}$$

et appelons p^{i}_{j} son tenseur dérivé sur V_n .

La relation (I.28) montre que le vecteur $N_{\alpha} D_{\beta} N_{+}^{\alpha}$ et le vecteur $N^{\alpha} D_{\beta} N_{\alpha}$ sont opposés.

Désignons par q_i le vecteur dérivé sur V_n de $N_{\alpha} D_{\beta} N_{+}^{\alpha}$

Dans le système des (x^{α}) , nous avons, d'après (I.29) les relations :

$$(I.41) \qquad p^{i}_{j} = \Gamma^{i}_{o\,j} \qquad q_i = \Gamma^{o}_{o\,i}$$

Les matrices (ω^{*}) peuvent alors s'écrire :

$$(I.42) \qquad (\omega^{*}) = \begin{pmatrix} q_h \cdot dx^h & , & p^{i}_{h} \cdot dx^h \\ m_{jh} \cdot dx^h & , & \Gamma^{i}_{j\,h} \cdot dx^h \end{pmatrix}$$

Remarque

Le tenseur m_{jh} est défini d'une manière intrinsèque sur V_n , tandis que le vecteur q_h , le tenseur p^{i}_{h} , et la connexion Γ^{i}_{jh} induite sur V_n par la connexion $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ de V_{n+1} dépendent des vecteurs N^{α} choisis sur V_n .

Pour que q_h , p^{i}_{h} et $\Gamma^{i}_{j\,h}$ soient bien déterminés sur V_n il faut se donner cette hypersurface , la connexion $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ de V_{n+1} , et en chaque point de V_n le vecteur N^{α} . Il faut, en outre, se limiter aux transformations de V_{n+1} définies par (I.32).

Les vecteurs N^{α} ne sont pas complètement arbitraires : on peut les obtenir en choisissant une congruence quelconque de transversales de V_n et en prenant, en chaque point de cette hypersurfa-

ce, le vecteur tangent à la transversale de V_n qui passe par ce point.

Dans le cadre de sa géométrie semi-métrique P.V. Grosjean (1) a considéré les matrices (I.42) et a fait remarquer que, dans sa théorie, la forme $q_h.dx^h$ n'a pas de caractère intrinsèque.

D'autre part Mme I. Cattaneo-Gasparini a unifié les notions de connexion affine et de connexion coaffine en utilisant une connexion projective. En se limitant aux transformations de la forme :

$$x'^{o} = x^{o} \quad , \quad x'^{i} = f^{i}(x^{j}) \quad ,$$

On donne aux matrices qui définissent cette connexion projective la structure des matrices (I.42) à condition de supposer que $q_h = o$

Dans l'étude de l'hypersurface V_n de la variété V_{n+1} un théorème de J.A. Schouten (3) permet d'annuler le vecteur q_h. En effet les transformations :

$$x'^{i} = x^{i} + x^{o} A^{i}_{1}(x^{o}, x^{j}) + (x^{o})^{2} A^{i}_{2}(x^{o}, x^{j}) + \ldots$$

(I.43)

$$x'^{o} = x^{o} + (x^{o})^{2} A^{o}_{1}(x^{o}, x^{j}) + \ldots$$

qui conservent les coordonnées de chaque point de V_n transforment le vecteur q_i suivant la loi :

$$q'_i = q_i + m_{ih} \cdot A^{h}_{1}$$

Si le déterminant de m_{ih} est différent de zéro, on peut déterminer A^{h}_{1} d'une manière unique de façon que q'_i soit nul et ce choix de A^{h}_{1} permet de définir un champ de vecteurs N^{α} unique sur V_n

Nous avons préféré conserver la forme la plus générale des matrices (ω^{*}) afin d'étudier toutes les possibilités d'extension de la théorie unitaire .

6. Les formules de Gauss et de Codazzi .

Définissons le tenseur de courbure de la variété V_{n+1} munie de la connexion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\,\gamma}$, par :

$$(I.44)\quad \Omega^{*\alpha}_{\beta} = d\,\omega^{*\alpha}_{\beta} + \omega^{*\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{*\rho}_{\beta} = \frac{1}{2} R^{*\alpha}_{\beta\,,\lambda\mu}\, dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu}$$

et désignons par $R^{i}_{j\,,rh}$ le tenseur de courbure de la variété V_n munie de la connexion induite $\Gamma^{h}_{i\,j}$. Le calcul de $\Omega^{*\alpha}_{\beta}$ donne alors les formules de Gauss et de Codazzi :

$$R^{*i}_{j,\,rh} \equiv R^{i}_{j,\,rh} + p^{i}_{r}\cdot m_{jh} - p^{i}_{h}\cdot m_{jr} \qquad (I.45)$$

$$R^{*o}_{j,\,rh} \equiv \partial_r m_{jh} - \partial_h m_{jr} + m_{ir}\cdot\Gamma^{i}_{j\,h} - m_{ih}\cdot\Gamma^{i}_{j\,r} + q_r\cdot m_{jh} - q_h\, m_{jr}$$

$$R^{*i}_{o,\,rh} \equiv \partial_r p^{i}_{h} - \partial_h p^{i}_{r} + \Gamma^{i}_{s\,r}\cdot p^{s}_{h} - \Gamma^{i}_{s\,h}\cdot p^{s}_{r} + p^{i}_{r}\cdot q_h - p^{i}_{h}\cdot q_r$$

$$R^{*o}_{o,\,rh} \equiv \partial_r q_h - \partial_h q_r + m_{ir}\cdot p^{i}_{h} - m_{ih}\cdot p^{i}_{r}$$

En contractant les indices i et r nous obtenons :

$$R^{*i}_{j,\,ih} \equiv R^{*}_{jh} \equiv R_{jh} + p^{i}_{i}\cdot m_{jh} - p^{i}_{h}\cdot m_{ji}\,. \qquad (I.46)$$

$$R^{*i}_{o,\,ih} \equiv R^{*}_{oh} \equiv \partial_i p^{i}_{h} - \partial_h p^{i}_{i} + \Gamma^{i}_{s\,i}\cdot p^{s}_{h} - \Gamma^{i}_{s\,h}\cdot p^{s}_{i} \qquad (I.47)$$

$$+\; p^{i}_{i}\cdot q_h - p^{i}_{h}\cdot q_i .$$

(1) P.V. Grosjean - Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1. 1960 p 45-92
(2) Mme I. Cattaneo-Gasparini - Annali di Mathematica pura et applicata (IV) vol L p. 967-74
(3) J.A. Schouten. Der Ricci Kalkul - Berlin 1924 p. 143 .

7. Géodésiques [15] [16] [22]

a) A toute matrice

$$(I.48)\qquad \Pi = \begin{pmatrix} q_h \cdot dx^h & , & p^i{}_h \cdot dx^h \\ \\ \Gamma_{jh} \cdot dx^h & , & \Gamma^i{}_{j\,h} \cdot dx^h \end{pmatrix}$$

correspond biunivoquement l'ensemble constitué par :

1) le vecteur covariant q_h .

2) la connexion affine :

$$(I.49)\qquad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & , & (p^i{}_h + \xi^i{}_{;h}) \cdot dx^h \\ \\ 0 & , & + \Gamma^i{}_{j\,h} \cdot dx^h \end{pmatrix}$$

où les ξ^i sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\xi}$ qui définit l'origine du repère affine relatif au point x, qui est constitué par le vecteur $\overrightarrow{\xi}$ et par une base de l'espace T_x tangent à V_n au point x .

3) la connexion coaffine :

$$(I.50)\qquad \Pi' = \begin{pmatrix} 0 & , & 0 \\ \\ (m_{jh} + \varphi_{j;h}) \cdot dx^h & , & - \Gamma^i{}_{j\,h} \cdot dx^h \end{pmatrix}$$

où les φ_j sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\varphi}$ qui définit l'origine du repère coaffine relatif au point x , qui est constitué par le vecteur $\overrightarrow{\varphi}$ et par une base de T^*_x dual de T_x

b) On appelle arc géodésique d'une variété à connexion affine V_n, un chemin de V_n qui se développe sur l'espace affine tangent en son origine suivant un segment de droite

S'il existe un tenseur $q_i^{\ j}$ tel que :

$$q_i^{\ j} \cdot p^i_{\ h} = \delta^j_h$$

les géodésiques de la connexion affine Π satisfont l'équation[1] :

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla} u^i}{d s} + q_k^{\ i} \cdot (\overset{\omega}{\nabla}_j p^k_{\ h}) \cdot u^h \cdot u^j = o \qquad \text{(I.51)}$$

lorsqu'on les rapporte au paramètre affine s .

On appelle arc géodésique d'une variété à connexion coaffine V_n^* , un chemin de V_n^* qui se développe sur l'espace T_x^* tangent en son origine suivant un segment de droite. S'il existe un tenseur n^{jh} tel que :

$$m_{jh} \cdot n^{jk} = \delta^k_n \ ,$$

les géodésiques de la connexion coaffine Π' satisfont l'équation :

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla} u^i}{d s} + n^{j\,i} \cdot (\overset{\omega}{\nabla}_k m_{jh}) \cdot u^h \cdot u^k = o \qquad \text{(I.52)}$$

lorsqu'on les rapporte au paramètre affine s

c) Dans la théorie de Bonnor et dans l'une de ses extensions que nous étudierons au Chapitre IV, on pose :

$$p^i_{\ h} = \delta^i_h \qquad m_{jh} = - \frac{p^2}{3} \cdot \varphi_{jh}$$

---

(1) $\overset{\omega}{\nabla}$ désigne l'opérateur de dérivation absolue associé à la connexion $\Gamma_i^{\ h}{}_j$

où p est une constante. Il en résulte que dans ces théories

1º La connexion affine Π associée à la connexion ω^{*} a les mêmes géodésiques que la connexion linéaire,

2º La connexion coaffine Π associée à la connexion ω^{*} a pour géodésiques les solutions de l'équation

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla} u^{i}}{d s} + \varphi^{ji} \cdot (\overset{\omega}{\nabla}_{k} \varphi_{jh}) u^{h} \cdot u^{k} = 0 \qquad (I.53)$$

qui ne semble pas avoir une interprétation physique simple.

C H A P I T R E II

LA THEORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET QUELQUES UNES DE SES EXTENSIONS

Après avoir rappelé brièvement l'axiomatique et quelques résultats de la théorie d'Einstein-Schrödinger, nous utilisons les remarques géométriques faites dans les paragraphes précédents, pour étendre cette théorie.

Nous cherchons à construire un lagrangien capable de conduire, par la méthode du tenseur d'énergie, aux équations du mouvement des particules chargées, placées dans un champ électromagnétique.

A) La théorie d'Einstein-Schrödinger [12] [13]

1) La variété fondamentale

L'élément primitif de la théorie d'Einstein-Schrödinger est constitué par une variété différentiable V_4 à 4 dimensions de classe C^2 , C^4 par morceaux.

Deux êtres géométriques sont définis sur cette variété :

1º un champ de tenseur g_{ij} de classe C^1, C^3 par morceaux

Ce tenseur g_{ij} qui est dit le tenseur fondamental ne possède aucune propriété de symétrie et il satisfait aux hypothèses suivantes :

a) le déterminant g de g_{ij} est différent de zéro

b) la forme quadratique $g_{ij}\ X^i\ X^j$ est une forme non dégénérée de type hyperbolique normal dont la signature est $(+, -, -, -)$.

De ces hypothèses il résulte que g_{ij} admet un tenseur associé g^{ih} défini par

(II.1) $$g_{ij}\ g^{ih} = \delta^{h}_{j}$$

Nous poserons*

(II.2) $$g_{\underline{ij}} = \gamma_{ij} \qquad g_{\underset{\vee}{ij}} = \varphi_{ij} \qquad g^{\underline{ij}} = h^{ij} \qquad g^{\underset{\vee}{ij}} = f^{ij}$$

Ces conventions permettent d'établir que les formes :

(II.3) $$h^{ij} \cdot Xi \cdot Xj \qquad \gamma_{ij} \cdot X^{i} \cdot X^{j}$$

sont non dégénérées et de type hyperbolique normal et que :

$$\gamma = \det\ \gamma_{ij} < o \qquad h = \det\ h_{ij} < o .$$

Le déterminant g vérifie quelques relations remarquables.

On a d'abord :

(II.4) $$\partial_{i} \log \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\ g^{jh} \cdot \partial_{i}\, g_{jh} = -\frac{1}{2}\ g_{jh} \cdot \partial_{i}\ g^{jh}$$

et en désignant par f et par φ les déterminants de f_{ij} et de φ_{ij} :

(II.5) $$g^{2} = h \cdot \gamma \qquad = f \cdot \varphi$$

(II.6) $$\frac{1}{g} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f} + \frac{1}{2\,h} \cdot h_{ij} \cdot h_{kh} \cdot f^{ik} \cdot f^{jh}$$

2) Les équations du champ sont déduites, comme en relativité générale, d'un principe variationnel.
Considérons sur V_4 une chaîne différentiable C à 4 dimensions.

---

* Les conventions et les notations ont été précisées dans l'introduction.

l'intégrale d'action est définie par :

$$(II.7) \qquad I = \int_C R_{ij} \cdot g^{ij} \cdot \sqrt{-g} \cdot d\tau$$

où R_{ij} désigne le tenseur de Ricci de la connexion linéaire $\Gamma_{i\,j}^{\ h}$

Les équations du champ s'obtiennent en cherchant l'extremum de l'intégrale I , pour des variations arbitraires du tenseur fondamental et de la connexion astreintes à s'annuler au bord de C.

On obtient ainsi le système :

$$(II.8) \qquad R_{ij} \ (\Gamma) = o$$

$$(II.9) \qquad \mathcal{G}^{ij}_{;h} \equiv \partial_h \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{G}^{kj} \cdot \Gamma_{k\,h}^{\ i} + \mathcal{G}^{ik} \cdot \Gamma_{h\,k}^{\ j} - \mathcal{G}^{ij} \cdot \Gamma_{h\,k}^{\ k} = \mathcal{G}^{ij} \cdot \Gamma_{h}^{} - \frac{2}{3} \cdot \mathcal{G}^{ik} \Gamma_{k}$$

Mais à la connexion linéaire $\Gamma_{i\,j}^{\ h}$ quelconque, on peut associer une connexion linéaire et une seule L_{ij}^{h} qui définit le même parallélisme et dont le vecteur de torsion est nul . Cette connexion est :

$$(II.10) \qquad L_{ij}^{\ h} = \Gamma_{ij}^{\ h} + \frac{2}{3} \cdot \delta_{i}^{\ h} \cdot \Gamma_{j} \ .$$

Si l'on explicite (II.9) à l'aide de cette connexion $L_{i\,j}^{\ h}$ on obtient les équations :

$$(II.11) \qquad D_h \mathcal{G}^{ij} \equiv \partial_h \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{G}^{Kj} \cdot L_{kh}^{\ i} + \mathcal{G}^{ik} \cdot L_{hk}^{\ j} - \mathcal{G}^{ij} L_{hk}^{\ k} = 0$$

$$(II.12) \qquad \partial_i \ (\sqrt{-g} \ . \ g^{ij}) = o \ .$$

Les quatre dernières équations sont équivalentes à $L_{i\,h}^{\ h} = o$.

Si l'on explicite le tenseur de Ricci $R_{ij}(\Gamma)$ à l'aide de la connexion $L_{ij}^{\ h}$, on obtient en désignant par $W_{ij}\ (L)$ le tenseur de Ricci de la connexion $L_{ij}^{\ h}$:

(II.13) $$W_{ij}(L) = \frac{2}{3}\left(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i\right).$$

où Γ_i est le vecteur de torsion arbitraire de la connexion $\Gamma^{h}_{i\,j}$.

En résumé les équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger sont donc fournies par les équations

(II.11) (II.12) (II.13)

Mais ces équations ne sont pas indépendantes, le procédé variationnel qui a permis de les écrire, où les identités de Bianchi, permettent de prouver que pour tout ensemble $(g_{ij}, \Gamma^{h}_{i\,j})$ déduit par (II.10) d'une solution $(g_{ij} \cdot L_i^{\ h}{}_j)$ des équations (II.11) et (II.12), on a les identités :

(II.14) $$\partial_h\left(\sqrt{-g} \cdot M_i^{\ h}\right) + \frac{1}{2} R_{jh} \cdot \partial_i\left(\sqrt{-g} \cdot g^{jh}\right) = 0$$

en posant :

(II.15) $$M_i^{\ h} = L_i^h - \frac{1}{2} \cdot \delta_i^{\ h} \cdot L \quad . \quad \text{et} \quad 2\, L_i^h = R_{ij} \cdot g^{hj} + R_{ji} \cdot g^{jh}$$

3) <u>Le problème de Cauchy</u> [12] [22]

Mme M.A. Tonnelat a résolu explicitement le système :

(II.16) $$\partial_i g_{jh} - L_j^{\ p}{}_i \cdot g_{ph} - L_h^{\ p}{}_i \cdot g_{jp} = 0$$

où les coefficients de la connexion sont les inconnues.

Pour un tenseur g_{ij} qui satisfait aux hypothèses du paragraphe (2. A. 1), ce système admet une solution unique, excepté dans le cas où l'on a simultanément : [13]

(II.17) $$\varphi = 0 \qquad g = 2\chi \quad .$$

Si l'on écarte ce cas, le champ est défini par le tenseur fondamental g_{ij} et le vecteur Γ_i qui vérifient les équations

$$\partial_i \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial} \overset{ij}{} = 0 \qquad \text{(II.18)}$$

$$W_{ij} = \frac{2}{3} (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i)$$

où les $L_i{}^h{}_j$ sont des fonctions des g_{ij} et de leurs dérivées premières déterminées par les équations (II.16) qui admettent une solution unique.

Le problème de Cauchy consiste à se donner sur une hypersurface S de V_4, le tenseur fondamental et ses dérivées premières ainsi que le vecteur Γ_i, et à déterminer ce tenseur et ce vecteur au voisinage de S en supposant qu'ils vérifient les équations (II.18) .

Ce problème se ramène à la recherche de données de Cauchy satisfaisant sur S à deux ensembles de conditions, puis à l'intégration, pour ces données de Cauchy d'un système formé par certaines équations du champ.

Dans le cas analytique, la solution existe et est unique si S n'est pas caractéristique.

Si C est représentée localement par l'équation $f(x^i) = 0$. les variétés caractéristiques sont solutions de l'une ou de l'autre des équations suivantes :

$$h^{ij} . \partial_i f . \partial_j f = 0 \qquad \gamma^{ij} . \partial_i f . \partial_j f = 0 \qquad \text{(II.19)}$$

$$(h^{ij} - \frac{2\varkappa}{g} . \gamma^{ij}) . \partial_i f . \partial_j f = 0 \qquad \text{(II.20)}$$

Les rayons associés sont les caractéristiques de ces équations, c'est à dire les géodésiques de longueur nulle des métri-

ques riemanniennes de type hyperbolique normal définies par les tenseurs associés de h^{ij} de $(h^{ij} - \frac{2\delta}{g} \cdot \gamma^{ij})$ et de λ^{ij}

Les solutions à symétrie sphérique . [40]

Les équations du système fort et celles du système faible ont été complètement résolues, dans le cas statique à symétrie sphérique par A. Papapetrou, M. Wyman, W.B. Bonnor et de Simoni . La seule solution statique à symétrie sphérique qui paraisse susceptible de conduire à des interprétations physiques est celle de A. Papapetrou . En désignant par m , V et k des constantes arbitraires, cette solution s'écrit :

$$g_{11} = - \frac{1}{1 - \frac{2m}{V^2 r}} \quad , \quad g_{22} = - r^2 \quad , \quad g_{33} = - r^2 \sin^2\theta$$

$$\underset{\nu}{g_{14}} = - \underset{\nu}{g_{41}} = \frac{Vk}{r} \quad ; \quad g_{44} = \left(V^2 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{k^2}{r^4} \right)$$

Dans le cas d'une solution à symétrie sphérique telle $\underset{\nu}{g_{14}} \not\equiv 0$, et $\underset{\nu}{g_{23}} \equiv 0$, Mademoiselle S. Mavridès a montré [39] que les équations du système faible sont identiques dans le cas statique et dans le cas non statique .

B - Les théories de Mme M.A. Tonnelat et de W.B. Bonnor .

Nous avons déjà dit dans l'introduction que la recherche des équations du mouvement en théorie d'Einstein-Schrödinger conduit à des résultats qui sont inacceptables. Pour tenter de

surmonter cet obstacle, plusieurs généralisations de la théorie ont été proposées.

1. La théorie linéaire générale de Mme M.A. Tonnelat [30] [31] [32]

Mme M.A. Tonnelat a construit une théorie linéaire générale dont le cadre géométrique est constitué, comme en théorie d'Einstein-Schrödinger, par une variété différentiable à quatre dimensions munie d'un tenseur fondamental g_{ij} et d'une connexion linéaire asymétrique $\Gamma^{p}_{q\,r}$ dont le vecteur de torsion est Γ_i.

Le tenseur de Riemann-Christoffel $R^{h}_{i\,,\,kj}$ de cette connexion, donne par contraction le tenseur de Ricci

$$R^{h}_{i\,,\,hj} = R_{ij}$$

et le tenseur

$$R^{h}_{h\,,\,kj} = P_{kj} = \partial_j \Gamma^{h}_{h\,k} - \partial_k \Gamma^{h}_{h\,j}$$

Le tenseur de Riemann $\tilde{R}^{h}_{i\,,\,kj}$ calculé à l'aide de la connexion

$$\tilde{\Gamma}^{p}_{q\,r} = \Gamma^{p}_{r\,q}$$

conduit de même aux tenseurs :

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}^{h}_{i\,,\,hj} \quad , \quad \tilde{P}_{kj} = \tilde{R}^{h}_{h,kj} = \partial_j \tilde{\Gamma}^{h}_{h\,k} - \partial_k \tilde{\Gamma}^{h}_{h\,j}$$

Les équations du champ s'obtiennent en appliquant un principe variationnel à la densité scalaire :

$$\mathcal{G}^{ij}\left[a\,R_{ij} + a'R_{ji} + b\,R_{ij} + b'\,R_{ji} + c\,P_{ij} + c'\,P_{ji} + e\,\Gamma_i \cdot \Gamma_j\right]$$

où a, a', b, b', c, c' , et e sont des scalaires .

La discussion de cette théorie générale montre l'intérêt que présente un cas particulier qui a été étudié par J. Lévy et L. Bouche [25] .

Ce cas particulier peut s'obtenir en appliquant un principe variationnel à la densité scalaire :

$$\mathcal{G}^{ij}\left[W_{ij}(L) + q\,(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) + p\,\Gamma_i \Gamma_j \right] + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

avec

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^i \cdot L_i \quad , \quad \mathcal{A}_2 = \rho\left[\mathcal{G}^{ij} \cdot \Gamma_i \Gamma_j - 2\, a^2 \sqrt{-g} \right]$$

$W_{ij}(L)$ est le tenseur de Ricci formé à l'aide de la connexion $L_i{}^h{}_j$ dont le vecteur de torsion L_i est nul. Cette dernière condition est introduite a priori par le multiplicateur de Lagrange $\mathcal{A}_1$. Le vecteur Γ_i est normé a priori, grâce au multiplicateur de Lagrange $\mathcal{A}_2$.

Les équations du champ s'écrivent :

$$(II.21) \qquad D_h \mathcal{G}^{ij}_{+} = -\frac{2}{3} \cdot \delta^i_h \cdot \partial_k \mathcal{G}^{jk}_{\vee}$$

$$(II.22) \qquad \partial_k \mathcal{G}^{jk}_{\vee} = \frac{p+\rho}{q} \cdot \mathcal{G}^{kj} \cdot \Gamma_k \; ; \; \mathcal{G}^{ij} \Gamma_i \Gamma_j = 2\, a^2 \sqrt{-g}$$

$$(II.23)_1 \qquad \omega_{\underline{ij}} \equiv W_{\underline{ij}}(L) + p\,\Gamma_i \Gamma_j - \rho(\Gamma_i \Gamma_j - a^2 \cdot g_{\underline{ij}}) = 0$$

$$(II.23)_2 \qquad \omega_{\underset{\vee}{ij}} \equiv W_{\underset{\vee}{ij}}(L) + q\,(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) - \rho\, a^2 \cdot g_{\underset{\vee}{ij}} = 0$$

A l'aide des identités de conservation, on montre que le tenseur

d'impulsion-énergie défini par :

$$-\chi T_{ij} = \omega_{\underline{ij}} - \frac{1}{2}\, a_{ij} \cdot a^{pq} \cdot \omega_{\underline{pq}} - \left(G_{ij} - \frac{1}{2}\, a_{ij} \cdot a^{pq} \cdot G_{pq} \right)$$

où G_{ij} est le tenseur de Ricci formé avec les symboles de Christoffel $\left\{ i^{h}{}_{j} \right\}_{a}$ relatifs à une métrique a_{ij} arbitraire, vérifie les identités :

$$\overset{a}{\nabla}_{i} \; T^{i}{}_{j} = 0 \,,$$

sous la seule condition que les équations antisymétriques du champ soient satisfaites, les équations du champ de gravitation n'intervenant pas .

Ce résultat s'établit rigoureusement pour une fonction d'action linéaire générale, lorsqu'on prend comme tenseur métrique le tenseur $h_{ij} \sqrt{\frac{g}{h}}$. Il est encore exact en première approximation pour un tenseur métrique a_{ij} arbitraire .

Si l'on suppose que les équations (II.21) (II.22) $(II.23)_1$ sont vérifiées, tandis que l'équation $(II.23)_2$ n'est pas satisfaite ($\omega_{ij} \neq 0$) , si l'on admet que le vecteur de torsion Γ_i est proportionnel au vecteur courant $\sigma\, u_i$ (u_i désignant un vecteur unitaire et σ la densité de charge donnée en chaque point) les équations de conservation de T_{ij} s'écrivent :

$$(II.24) \qquad k\, u^{i} \cdot \partial_{i} u_{j} = a \cdot g^{\overset{mn}{\vee}} \cdot \Box \varphi_{mnj} + k \cdot b \cdot u^{i} \, \Box \varphi_{ji}$$

lorsque l'on onet des termes non significatifs, On désigne par a et b deux scalaires, et l'on pose $k = \frac{p + \sigma}{q}$

Ainsi, sans sortir du cadre de l'espace à quatre dimensions, et sans utiliser de termes phénoménologiques, cette théo-

rie permet de trouver par la méthode du tenseur d'énergie les équations du mouvement d'une particule chargée.

2. La théorie de W.B. Bonnor [23] [24]

Bonnor a proposé d'ajouter au lagrangien de la théorie unitaire asymétrique le terme $- p^2 . \varphi_{ij} . \varphi^{ij}$ analogue à celui que l'on utilise dans la théorie d'Einstein-Maxwell.

Un calcul simple donne :

$$\delta \left[\varphi_{ij} \varphi^{ij} \right] = \left[+ g_{ij} + g^{mn} \cdot g_{im} \cdot g_{nj} - \frac{1}{2} g^{mn} \cdot g_{nm} \cdot g_{ij} \right] . \delta \varphi^{ij}$$

Nous poserons dans la suite :

$$U_{ij} = - \left[g_{ij} + g^{mn} \cdot g_{im} \cdot g_{ni} - \frac{1}{2} . g^{mn} \cdot g_{nm} \cdot g_{ij} \right] \qquad \text{(II.25)}$$

si le champ électromagnétique est défini par les tenseurs

$$g_{ij} \quad \text{et} \quad g^{ij}$$

le tenseur U_{ij} contient un tenseur du type électromagnétique.

L'application du principe variationnel à l'intégrale :

$$\int_c \left[R_{ij} \cdot g^{ij} + p^2 \varphi_{ij} \cdot g^{ji} \right] \sqrt{-g} \, . \, dx$$

donne les équations du champ :

$$D_h \, g^{ij} = 0 \quad , \quad \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{-g} \right) = 0$$

$$R_{ij} + p^2 . U_{ij} = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

La dernière de ces équations impose à la densité de courant définie par :

$$I_{ijk} = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki}$$

une condition qui s'écrit à l'approximation quasi-minkowskienne :

$$\square I_{ijk} = - 4p^2 . I_{ijk}$$

La méthode des singularités permet de mettre en évidence la force de Coulomb dans les équations du mouvement d'une particule chargée, mais la force exercée par le champ magnétique sur la particule n'apparait pas dans les approximations quasi-statiques développées par Bonnor.

La recherche des solutions statiques à symétrie sphérique pose, dans le cas où $g_{14} \equiv 0$, $g_{23} \not\equiv 0$, un problème difficile qui n'est pas résolu.

Malheureusement, cette théorie n'est pas unitaire car le terme supplémentaire introduit dans l'intégrale d'action n'a pas une origine géométrique .

C - PRINCIPE DE L'EXTENSION DE LA THEORIE .

L'extension de la théorie que nous allons étudier admet comme élément primitif une variété V_5 à cinq dimensions, de classe C^2 , C^4 par morceaux .

Cette dernière expression signifie que dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées admissibles, les fonctions qui définissent le changement de coordonnées sont des fonctions 4 fois dérivables dont le jacobien n'est pas nul, dont les dérivées premières et secondes sont continues, et dont les dérivées troisièmes et quatrièmes sont continues excepté au voisinage d'un nombre fini de surfaces de discontinuité à la traversée desquelles ces dérivées présentent des discontinuités du type de Hadamard .

1) La connexion et le tenseur fondamental

Considérons donc une variété différentiable V_5 à 5 dimensions, rapportée à un système de coordonnées (y^α) . Désignons par V_4 une hypersurface à quatre dimensions de V_5 et dont l'équation est localement :

$$f (y^0 , y^1 , \dots , y^4) = 0$$

où f est une fonction irréductible, et par T la congruence à quatre paramètres des courbes de V_5 dont les équations sont :

$$f^i(y^0 , y^1 , \dots , y^4) = b^i$$

où les b^i sont des constantes arbitraires .
Le changement de coordonnées :

$$x^0 = f (y^0, y^1, .., y^4) , x^i = f^i(y^0, y^1 , .., y^4)$$

transforme l'équation de l'hypersurface V_4 en :

$$x^0 = 0 ,$$

et transforme les équations des courbes de la congruence T en :

$$x^i = b^i$$

Dans le système de coordonnées (x^α) , les courbes de T sont donc les transversales de V_4 . Le vecteur N^α qui a pour composantes $X\ N^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^0}$ dans le système (y^α) et $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^0}$ dans le système (x^α) est tangent aux courbes de T car le long de ces courbes x^0 varie seul .

D'après le paragraphe (1,B,2) nous savons que les transformations de coordonnées les plus générales de V_5 , telles V_4 soit définie dans les deux systèmes (x^α) et (x'^α) par :

$$0 = x^0 = x'^0 ,$$

et qui laissent invariant en chaque point de V_4 le vecteur N^α relatif à ce point sont données par (I.32), transformations qui, sur V_4, correspondent biunivoquement aux transformations les plus générales de V_4 .

Supposons

I) que V_5 soit munie d'un tenseur fondamental asymétrique $g^*_{\alpha\beta}$;

Nous admettons

a) que le déterminant g^* des $g^*_{\alpha\beta}$ est différent de zéro .

Il en résulte que $g^*_{\alpha\beta}$ admet un tenseur associé $g^{*\alpha\gamma}$ tel que:

$$g^*_{\alpha\beta} \cdot g^{*\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\alpha \qquad \text{(II.27)}$$

Pour les transformations (I.32) , g^*_{oo} et g^{*oo} , se transforment comme deux scalaires; g^*_{oi} , g^*_{io} , g^{*io} , g^{*oi} constituent respectivement les composantes de quatre vecteurs, tandis que g^*_{ij} et g^{*ij} sont les composantes de deux tenseurs .

Les relations (II.27) donnent :

$$\begin{aligned} g^{*ij} \cdot g^*_{io} + g^{*oj} \cdot g^*_{oo} &= 0 \\ g^{*ij} \cdot g^*_{ih} + g^{*oj} \cdot g^*_{oh} &= \delta^j_h \end{aligned} \qquad \text{(II.28)}$$

Nous en déduisons que :

$$g^{*ij} \left(g^*_{ih} - \frac{g^*_{io} \cdot g^*_{oh}}{g^*_{oo}} \right) = \delta^j_h \qquad \text{(II.29)}$$

à condition de supposer que g^*_{oo} est différent de zéro

b) que g^*_{oo} est identique à 1 sur V_4

Si nous posons :

$$g^{*\,ij} = g^{ij} ,$$

le tenseur g_{ih} associé au tenseur g^{ij} a pour composantes sur V_4 :

$$g_{ih} = g^{*}_{ih} - g^{*}_{io} \cdot g^{*}_{oh}$$

d'après les relations (II.29) et l'hypothèse b . La relation :

$$\text{dét } g^{ij} = g_{oo} / g^{*}$$

donne, d'après l'hypothèse b :

$$\text{dét } g^{ij} = \frac{1}{g^{*}} \neq 0$$

Il en résulte que le déterminant g du tenseur g_{ih} vaut sur V_4 :

$$g = g^{*}$$

c) que la forme quadratique $g_{ij}\ X^i \cdot X^j$ est une forme de type hyperbolique normal dont la signature est caractérisée par trois carrés négatifs et un carré positif. Nous remarquons que cette condition est conservée par les changements de coordonnées (I.32), le jacobien des $f^i(x^j)$ étant supposé non nul.

Nous utiliserons les mêmes notations que dans la théorie d'Einstein-Schrödinger, et une démonstration faite dans cette théorie prouve que la forme quadratique $h^{ij} \cdot X_i \cdot X_j$ est aussi non dégénérée, et de type hyperbolique normal. Nous avons donc d'après l'hypothèse c :

$$\text{dét } \gamma_{ij} < 0 \quad , \quad \text{dét } h^{ij} < 0$$

II) que les $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ désignent les coefficients d'une connexion linéaire asymétrique définie sur l'espace fibré des repères linéaires de V_5 dans un système de coordonnées (x^α) . Pour les

transformations (I.32), les coefficients $\Gamma^{\ o}_{o\ i}$, $\Gamma^{\ o}_{i\ j}$, $\Gamma^{\ i}_{o\ j}$ constituent respectivement les composantes d'un vecteur et de deux tenseurs, tandis que les $\Gamma^{\ i}_{j\ h}$ sont les coefficients de la connexion linéaire asymétrique induite sur V_4 par la connexion $\Gamma^{\ \gamma}_{\alpha\ \beta}$ de V_5, pour la congruence des transversales de V_4 que nous avons choisie .

Nous posons :

$$(II.30) \qquad q_i = \Gamma^{\ o}_{o\ i} \quad , \quad m_{ij} = \Gamma^{\ o}_{i\ j} \quad , \quad p^i{}_j = \Gamma^{\ i}_{o\ j}$$

2) L'Intégrale d'action

Pour les transformations (I.32), nous avons établi que les composantes $R^{*}_{\alpha\ j}$ du tenseur de Ricci de la connexion sont données par :

$$1) \quad R^{*}_{oj} = R_{oj} + \partial_h(p^h{}_j) + \Gamma^{\ h}_{ih} p^i{}_j - \Gamma^{\ i}_{hj} . p^h{}_i + p^h{}_h . q_j - p^h{}_j . q_h - \partial_j(p^h{}_h)$$

$$(II.32) \qquad R^{*}_{ij} = R_{ij} + p^h{}_h . m_{ij} - p^h{}_j . m_{ih}$$

Pour ces transformations (I,32) l'expression

$$(II.33) \qquad R^{*}_{\alpha j} . \mathcal{g}^{\alpha j} . \sqrt{|g^{*}|} = (R^{*}_{oj} . g^{oj} + R^{*}_{ij} . g^{ij}) . \sqrt{|g|}$$

généralise le lagrangien de la théorie d'Einstein-Schrödinger, et elle permet d'incorporer au tenseur de Ricci $R^{*}_{\alpha j}$ des termes phénoménologiques qui prennent alors un caractère géométrique. Nous allons tenter d'étendre la théorie du champ non symétrique en utilisant cette expression comme lagrangien.

3) Equations du champ

Si nous considérons $\Gamma^{\ h}_{i\ j}$, $\mathcal{g}^{ij}$, $\mathcal{g}^{oj}$, $p^i{}_k$, m_{jh}, q_i comme des variables indépendantes, nous obtenons en appliquant

un principe variationnel à l'intégrale :

$$\int_c \left[R_{jh} \cdot \mathcal{G}^{jh} + R_{oh} \cdot \mathcal{G}^{oh} \right] d\tau$$

les équations du champ suivantes.

a) $$-G^{ij}_{h} \equiv \partial_h \mathcal{G}^{ij} - \delta^j_h \cdot \partial_k \mathcal{G}^{ik} - \mathcal{G}^{ij} \Gamma^{k}_{h\,k} - \delta^j_h \cdot \mathcal{G}^{pk} \cdot \Gamma^{i}_{pk}$$

(II.34)
$$+ \mathcal{G}^{ih} \cdot \Gamma^{j}_{hk} + \mathcal{G}^{kj} \cdot \Gamma^{i}_{kh} - \mathcal{G}^{ok} \cdot p^i_k \cdot \delta^j_h + \mathcal{G}^{oj} \cdot p^i_h = o$$

d'où nous déduisons :

$$-G^{k\,j}_{k} \equiv 2\,\partial_h \mathcal{G}^{\underset{\vee}{hj}} + \mathcal{G}^{oj} \cdot p^i_i - \mathcal{G}^{oh} \cdot p^j_h = o$$

(II.35)
$$-G^{ij}_{h} + \frac{1}{3}\,\delta^j_h G^{ik}_{k} \equiv \partial_h \mathcal{G}^{ij} + \frac{2}{3}\,\mathcal{G}^{ik} \cdot \Gamma^{p}_{\underset{\vee}{k}p} \cdot \delta^j_h - \mathcal{G}^{ij} \cdot \Gamma^{k}_{h\,k}$$
$$+ \mathcal{G}^{ik} \Gamma^{j}_{hk} + \mathcal{G}^{kj} \cdot \Gamma^{i}_{kh} + \mathcal{G}^{oj} \cdot p^i_h = o$$

b) L'équation relative à q_i s'écrit :

(II.36)
$$p^i_i \cdot \mathcal{G}^{oh} - p^h_i \cdot \mathcal{G}^{oi} = o$$

jointe à (II.35.1) cette équation entraîne :

(II.37)
$$\partial_h \mathcal{G}^{\underset{\vee}{hj}} = o$$

c) L'équation relative à $\mathcal{G}^{jh}$ est :

(II.38)
$$R_{jh} * p^i_i \cdot m_{jh} - p^i_h \cdot m_{ji} = o$$

d) La variation de $\mathcal{G}^{oh}$ donne :

(II.39)
$$\partial_i(p^i_h) - \partial_h(p^i_i) + \Gamma^{i}_{ji} \cdot p^j_h - \Gamma^{i}_{jh} p^j_i + p^i_i \cdot q_h - p^i_h \cdot q_i = o$$

e) et celle de m_{jh} conduit à l'équation :

(II.40) $$p^{i}_{\ i}\, g^{hj} - p^{j}_{\ k}\cdot g^{hk} = o$$

Multiplions les 2 membres de (II.40) par g_{hr} , nous obtenons :

(II.41) $$p^{i}_{\ i}\cdot \delta^{j}_{\ r} - p^{j}_{\ r} = o$$

D'où l'on déduit par contraction de j et de r

(II.42) $$p^{i}_{\ i} = o \qquad\qquad p^{j}_{\ r} = o$$

Enfin l'équation relative à $p^{i}_{\ h}$ s'écrit :

$$o = \delta^{h}_{\ i}\cdot m_{jk}\cdot \mathcal{G}^{jk} - \mathcal{G}^{jh}\cdot m_{ji} - \partial_i \mathcal{G}^{oh} + \delta^{h}_{\ i}\cdot \partial_k \mathcal{G}^{ok}$$

(II.43) $$+ \Gamma^{p}_{i\,p}\cdot \mathcal{G}^{oh} - \Gamma^{h}_{i\,k}\cdot \mathcal{G}^{ok} + \delta^{h}_{i}\cdot q_k \cdot \mathcal{G}^{ok} - q_i \cdot \mathcal{G}^{oh}$$

Il en résulte que :

<u>Lorsque</u> $\Gamma^{k}_{i\,j}$, $\mathcal{G}^{ij}$, $\mathcal{G}^{oj}$, $p^{i}_{\ h}$, m_{jk} <u>et</u> q_i <u>sont des variables indépendantes, les équations du champ se réduisent à celles de la théorie d'Einstein-Schrödinger complétées par l'équation (II.43) dans laquelle</u> g^{oh} <u>et</u> m_{jk} <u>sont arbitraires</u> .

Le cas que nous venons de considérer n'est donc pas nouveau.

Le système obtenu contient nécessairement l'équation (II.37) et les théories de Madame M.A. Tonnelat montrent qu'il peut y avoir intérêt à considérer des systèmes dans lesquels $\partial_i \mathcal{G}^{ij}$ n'est pas nul.

La théorie de Bonnor prouve d'autre part qu'il peut être utile de supposer que les six ensembles de variables $\mathcal{G}^{ij}$, $\mathcal{G}^{oh}$, $\Gamma^{h}_{i\,j}$, m_{ij} , $p^{i}_{\ h}$, q_i ne sont pas indépendantes

Nous verrons en effet que cette théorie s'obtient avec les hypothèses :

$$g^{oj} \equiv o \qquad q_i \equiv o \qquad p^i{}_h \equiv \delta^i{}_h$$

$$m_{jh} = \frac{-p^2}{3} \cdot \varphi_{jh}$$

En partant des remarques précédentes, nous allons construire des systèmes d'équations du champ basés sur l'emploi de la structure géométrique précédemment définie et nous chercherons s'ils peuvent conduire à des équations du mouvement correctes.

4) Discussion

α) Equation relative à m_{ji}

a) si m_{ji} est une variable indépendante, l'équation d'Euler correspondante (II.40) donne

$$p^i{}_h = o$$

et la théorie se réduit à celle d'Einstein-Schrödinger

Pour nous débarrasser de cette équation nous devons poser

1) que $m_{ji} \equiv o$

ou 2) que $m_{ji} \equiv a \cdot \delta_{ji}$ (a scalaire)

ou 3) que m_{ji} est une fonction donnée a priori des autres variables.

b) si m_{ji} est un tenseur qui ne dépend que des $\Gamma^i{}_{hk}$ nous obtenons une théorie qui comprend comme cas particulier, la théorie linéaire générale de Mme M.A. Tonnelat.

Il suffit de supposer que : $g^{oh} \equiv o \quad p^{i}_{h} \equiv \delta^{i}_{h}$

$$(II.44)''' \quad m_{jh} \equiv \frac{1}{3}\left[a' R_{hj} + b \tilde{R}_{jh} + b' R_{hj} + c P_{hj} + c' \tilde{P}_{jh} + e . \Gamma_{j} . \Gamma_{h} \right]$$

pour retrouver l'hamiltonien de la théorie linéaire générale.

c) si m_{ji} est un tenseur qui dépend de g_{pq}, nous trouvons un hamiltonien qui généralise celui qui a été choisi par W. Bonnor lequel correspond aux hypothèses :

$$(II.45) \qquad m_{jh} \equiv \frac{-p^2}{3} . \varphi_{jh} \qquad p^{i}_{h} \equiv \delta^{i}_{h} \; ; \; g^{oh} \equiv o$$

d) si m_{ji} est un tenseur qui dépend de q_i et de g_{hk}, nous pouvons imposer à la norme de q_h une condition a priori qui s'intègre à la matrice $(\omega^{\alpha}_{\beta})$

Il suffit de poser :

$$(II.46) \qquad m_{ji} \equiv \frac{\rho}{3} . (q_i q_j - \frac{+a^2}{4} . g_{ji}) \; ; \; p^{i}_{h} \equiv \delta^{i}_{h} \quad (\rho \text{ scalaire})$$

pour faire apparaître dans le lagrangiem le terme

$$(II.47) \qquad \rho . (\varphi^{ij} . q_i q_j - a^2 \sqrt{-g})$$

e) si m_{ji} est un tenseur qui dépend de g^{oi} et de g_{hk}, les hypothèses

$$(II.48) \qquad p^{i}_{h} \equiv \delta^{i}_{h} \; , \; m_{ji} \equiv \frac{\rho}{3} (g^{ok} . g^{oh} . g_{jk} . g_{ih} - \frac{a^2}{4} g_{ij})$$

permettent de faire apparaître dans le lagrangien le terme

$$(II.49) \qquad \rho . (g^{oh} . g^{ok} . g_{hk} - a^2) . \sqrt{-g}$$

qui impose a priori une norme au vecteur g^{oh}

f) On peut supposer que m_{ji} dépend de $p^k{}_h$ mais cette hypothèse semble peu intéressante car l'équation d'Euler relative à $p^k{}_h$ n'a pas de sens physique .

β) L'équation relative à $p^i{}_h$ ne semble pas avoir un sens physique très clair

Nous pouvons la supprimer

a) en posant $p^i{}_h \equiv a.\delta^i{}_h$.(a scalaire)

C'est ce que nous avons fait pour retrouver la théorie de Bonnor et celle de Mme M.A. Tonnelat.

b) en supposant que $p^i{}_h$ est un tenseur qui dépend des autres variables

α) Si $p^i{}_h$ dépend de g^{pq} la forme de l'équation d'Euler relative à g^{oh} (II.39) nous a suggéré de tenter d'identifier cette équation à l'équation de Maxwell qui fait intervenir le courant. Nous résumerons cette tentative dans la suite.

β) On peut supposer que $p^i{}_h$ est un tenseur qui dépend des variables $\Gamma^t{}_{ij}$, q_i , g^{ok} .

En particulier nous avons remarqué que l'hypothèse

(II.50) $$p^i{}_h \equiv g^{oi}.q_h$$

conduit à l'équation relative à q_h :

(II.51) $$g^{oi}(g^{ok}{}_{;i}) + g^{oh}.g^{ik}.m_{ih} - g^{ok}.(g^{oj}{}_{;j}) - g^{ok}.g^{ij}m_{ij}=o$$

Cette équation rappelle l'équation dynamique des particules chargées, mais elle n'est pas une conséquence de l'équation symétrique. Cette difficulté et quelques

autres nous ont fait abandonner cette tentative.

c) en supposant que

$$p^{i}_{h} \equiv 0$$

on retrouve alors la théorie d'Einstein-Schrödinger

D - EXTENSIONS DE LA THEORIE UNITAIRE ASYMETRIQUE

1. Le tenseur matériel

Pour que la méthode du tenseur d'énergie soit applicable à la théorie unitaire, il est nécessaire que le tenseur d'impulsion-énergie contienne un tenseur matériel de la forme :

$$\rho\, u_i\, u_j$$

(où u_i désigne un vecteur unitaire)

Si nous supposons, a priori, qu'un vecteur V_i est soumis à la condition

$$g^{ij} . V_i V_j = a^2 \qquad (a^2 \text{ scalaire}) \tag{II.52}$$

nous devons ajouter un multiplicateur de Lagrange à l'intégrale d'action qui devient :

$$\int_c \left[R_{\alpha j} . \mathcal{G}^{\alpha j} - \rho(\mathcal{G}^{ij} . V_i . V_j - a^2 \sqrt{-g}) \right] d\tau \tag{II.53}$$

les équations du champ relatives à la variable $\mathcal{G}^{ij}$ s'écrivent:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} . g_{ij} . (R_{pq} . g^{pq}) = \rho . V_i V_j \tag{II.54}$$

et un tenseur matériel apparait dans le tenseur d'énergie-impulsion.

Trois vecteurs sont disponibles pour jouer le rôle du vecteur V_i:

---

(1) Cf G. Stephenson . Il Nuovo Cimento, 1953, 10, 1595.6

a) le vecteur de torsion Γ_i de la connexion

b) le vecteur q_i

c) le vecteur g^{ih}

2. Le tenseur champ électromagnétique

Pour que la méthode du tenseur d'énergie soit applicable à une théorie unitaire, il est nécessaire que le tenseur d'impulsion-énergie contienne un terme ayant la forme d'un tenseur d'énergie du champ électromagnétique.

Deux procédés permettent d'obtenir un tel tenseur.

a) Mme M.A. Tonnelat a montré (2) que dans le cas où l'on utilise la métrique $\gamma_{ij}.dx^i.dx^j$ on peut tirer du tenseur de Ricci un tenseur d'énergie du type champ électromagnétique :

$$T_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\varphi_{ih}.F_j{}^h + \varphi_{jh}.F_i{}^h\right) + \frac{1}{4}.\gamma_{ij}.\varphi_{pq}.F^{pq} \qquad (II.55)$$

Les tenseurs du champ électromagnétique sont alors :

$$\varphi_{ij} \text{ ou } f^{ij} \text{ et } F_{ij} = -\frac{4}{3X}\left(\partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i\right) \qquad (II.56)$$

où Γ_i vecteur de torsion de la connexion linéaire joue le rôle du potentiel et où X est un invariant.

b) Bonnor a ajouté au lagrangien le terme

$$-p^2.\varphi_{ij}.\frac{\varphi^{ij}}{3} \qquad (II.57)$$

Ce terme de nature phénoménologique ôte à la théorie son caractère unitaire.

Mais si nous posons dans $(\omega^*{}^{\alpha}_{\beta})$

$$m_{ji} \equiv \frac{-p^2}{3}.\varphi_{ji} \qquad p^i{}_j \equiv \delta^i{}_j \qquad (II.58)$$

Nous obtenons d'après les formules (I.46)

---

(2) Mme M.A. Tonnelat. Il Nuovo Cimento 1956 série X vol. 3 p. 902-920

(II.59) $$R^{x}_{ji} \cdot \mathcal{G}^{ji} \equiv R_{ji} \cdot \mathcal{G}^{ji} + p^2 \cdot \varphi_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ji}.$$

La présence dans le lagrangien du terme de Bonnor $-p^2 \varphi_{ji} \mathcal{G}^{ji}$ entraîne l'apparition dans le tenseur d'impulsion énergie d'un tenseur du type électromagnétique. En effet l'équation d'Euler relative à $\mathcal{G}^{ji}$ s'écrit :

(II.60) $$R_{ji} - p^2 \cdot \varphi_{ji} = p^2 \left[\frac{1}{2} g^{pq}_{\vee} \cdot g_{pq} \cdot g_{ji} - g_{jp} \cdot g_{qi} \cdot g^{qp}_{\vee} \right]$$

Si les φ_{ji} sont petits devant l'unité et s'ils sont du premier ordre en ε, nous obtenons au second ordre d'approximation :

(II.61) $$M_{\underline{ji}} = p^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \varphi^{\underline{p}}{}_{\underline{q}} \cdot \varphi_{pq} \cdot \gamma_{ji} - 2\, \varphi^{\underline{q}}{}_{j} \cdot \varphi_{q\underline{i}} \right] + o(\varepsilon^2)$$

où M_{ji} désigne la partie symétrique du second membre de l'équation (II.60) et où les indices soulignés ont été élevés à l'aide de γ^{ij}

A cet ordre d'approximation $M_{\underline{ji}}$ se réduit donc à un tenseur de Maxwell.

Appelons, avec Kichenassamy[3], théorie du type Einstein-Schrödinger une théorie non symétrique dans laquelle

(II.62) $$\partial_j \mathcal{G}^{ij}_{\vee} = 0$$

et théorie du type Einstein-Tonnelat une théorie dans laquelle

(II.63) $$\partial_j \mathcal{G}^{ij}_{\vee} = \mathcal{F}^{i} \not\equiv 0$$

Si le lagrangien d'une théorie non symétrique contient le terme de Bonnor, les tenseurs du champ électromagnétique sont :

---

(3) Kichenassamy Thèse, Paris 1958 .

a) dans le cas d'une théorie du type Einstein-Tonnelat

f^{ij} et φ_{ij}

b) dans le cas d'une théorie du type Einstein-Schrödinger

(II.64)

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ij\ pq} \cdot f^{pq} \cdot \sqrt{-g} \cdot \quad \text{et} \quad \Phi^{ij} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{ijpq}}{\sqrt{-g}} \cdot \varphi_{pq}$$

car il résulte facilement des hypothèses faites sur l'ordre de grandeur des φ_{ij} que :

(II.65) $$M_{ji} = \left(\frac{1}{2} \Phi^{pq} \cdot F_{pq} \cdot \delta_{ji} - 2 \Phi^{q}{}_{j} \cdot F_{qi}\right) + o(\varepsilon^3)$$

Nous poserons dans la suite pour simplifier l'écriture :

(II.66) $$- U_{ji} = \varphi_{ji} + \frac{1}{2}\left[g^{pq}_{\vee} \cdot g_{pq} \cdot g_{ji} - g_{jp} \cdot g_{qi} \cdot g^{qp}_{\vee} \right]$$

Les généralisations de la théorie non-symétrique

a) Assimilation des Γ_i aux potentiels électromagnétiques

Si le tenseur d'énergie électromagnétique est tiré du tenseur de Ricci par la méthode de Mme M.A. Tonnelat, les tenseurs du champ électromagnétique sont :

$$\varphi_{ij} \qquad \text{et} \qquad \frac{-4}{3\chi}\left(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i\right)$$

Dans ce cas Γ_i joue le rôle du potentiel et il n'est pas possible de le normer a priori pour faire apparaître le tenseur matériel, car le vecteur courant serait proportionnel à Γ_i. (4)

1º) Nous pouvons normer q_i.

Pour que l'équation d'Euler relative à q_i ne conduise pas à :

$$q_i = o$$

il faut supposer que $g^{oh} \neq 0$

La matrice $(\omega^{\alpha}_{\beta})$ et le tenseur fondamental sont donc :

$$(II.67)\quad (\omega^{\alpha}_{\beta}) = \begin{vmatrix} q_h . dx^h & , & \delta^i_h . dx^h \\ -\frac{\rho}{3}(q_j . q_h - x^2 g_{jh}) dx^h & , & \Gamma^i_{jh} . dx^h \end{vmatrix} \quad , (g^{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} g^{oo} , g^{oh} \\ g^{io} , g^{ih} \end{vmatrix}$$

le lagrangien s'écrit :

$$(II.68)\quad R_{jh} . \mathcal{G}^{jh} + \mathcal{G}^{oh} (3 q_h + 2 \Gamma_h) - \rho (\mathcal{G}^{jh} q_j . q_h - x^2 . \sqrt{-g})$$

les équations du champ sont :

$$R_{jh} - \rho (q_j . q_h - \frac{x^2}{2} . q_{jh}) = 0$$

$$(II.69)\quad \partial_i \mathcal{G}^{ij}_{V} = -\frac{2}{3} . \rho . \mathcal{G}^{jh} . \Gamma_h$$

$$D_h \mathcal{G}^{ij}_{\pm} = \frac{2}{3} . \delta^i_h . \partial_p \mathcal{G}^{pj}_{\vee}$$

$$3 . \mathcal{G}^{oh} - 2\rho . \mathcal{G}^{jh} . q_j = 0$$

$$3 . q_h + 2 . \Gamma_h = 0$$

et le potentiel est proportionnel au vecteur courant, ce qui n'est pas satisfaisant .

2º) Nous pouvons normer g^{oi} .

Il faut alors supposer que $q_h \equiv 0$, car si q_h était une variable indépendante, l'équation d'Euler relative à q_h serait

$$g^{oh} = 0$$

si l'on prend encore $p^i_h \equiv \delta^i_h$, l'intégrale d'action est :

$$\int_c \left[R_{jh} \mathcal{G}^{jh} + 2 \mathcal{G}^{oh} \Gamma_h - \rho (g^{oi} . g^{oj} g_{ij} - a^2) \sqrt{-g} \right] d\tau$$

Les équations du champ s'écrivent :

$$R_{ij} - \frac{\rho}{2}\left[a^2 . g_{ij} + 2\, g^{op} . g^{oq} . g_{iq} . g_{pj} \right] = o$$

$$\Gamma_h - \rho . g^{oi} . g_{ih} = o \qquad ; \qquad g^{oi} . g^{oj} . g_{ij} = a^2 .$$

(II.70)
$$\partial_i \mathcal{G}^{ij}_{\vee} = - \frac{3}{2} \mathcal{G}^{oj} = - \frac{3}{2\rho} \Gamma_h \, g^{jh} . \sqrt{-g}$$

$$D_h \mathcal{G}^{ij}_{\pm} = \frac{2}{3} . g^{i}_{h} . \partial_p \mathcal{G}^{pj}_{\vee}$$

et le vecteur potentiel Γ_i est encore proportionnel au vecteur courant.

Dirac a proposé[4] une théorie de l'électromagnétisme dans laquelle les équations de Maxwell :

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad , \quad \nabla_i F^{ij} = \mu . A^j$$

sont complétées par la condition :

$$g^{ij} . A_i . A_j = h^2 \qquad \left(h = \frac{m}{e} \right)$$

Le potentiel vecteur A_i satisfaisant à cette condition se déduit d'un potentiel vecteur quelconque connu A^{*}_{i} par addition du gradient d'une fonction S telle que :

(II.71)
$$g^{ij} . (\partial_i S + A^{*}_{i})(\partial_j S + A^{*}_{j}) = h^2$$

Mais Gabor a fait remarquer que l'hypothèse de la proportionnalité du vecteur courant et du potentiel vecteur permet seulement la description de certains courants électriques d'un type particulier.

En effet, la condition (II.71) exige que :

$$h . u_i - A^{*}_{i} = \partial_i S$$

où u_i désigne le vecteur vitesse unitaire

Il en résulte que le rotationnel de $(h.u_i - A_i^*)$ est nul. Mais on peut facilement imaginer des cas dans lesquels ce rotationnel est différent de zéro.

Nous devons donc rejeter tous les systèmes d'équations du champ qui font apparaître une proportionnalité entre le vecteur courant et le potentiel vecteur.

b) Méthode de Bonnor

Utilisons le terme $-p^2 \mathcal{G}^{ij} . \varphi_{ij}$ introduit par Bonnor dans le lagrangien pour faire apparaître un tenseur d'énergie du type électromagnétique.

Les tenseurs du champ électromagnétique sont alors les tenseurs f^{ij} et φ_{ij} ou leurs adjoints et pour que la théorie ait un sens physique, il est nécessaire que l'un d'eux soit un rotationnel.

1) Dans une première tentative, nous remarquerons que

(II.72) si $$\partial_h (p^i{}_i) = o$$

l'équation d'Euler relative à $\mathcal{G}^{oh}$:

(II.39) $$\partial_i (p^i{}_h) + \Gamma_j{}^i{}_i . p^j{}_h - \Gamma_j{}^i{}_h . p^j{}_i + p^i{}_i . q_h - p^i{}_h . q_i = o$$

et l'équation de liaisom

(II.37) $$\partial_h \mathcal{G}^{hj} = o$$

présentent une analogie formelle avec les équations de Maxwell de la théorie provisoire de l'électromagnétisme.

(II.73) $$\nabla_i F^{ih} = j^h \qquad \nabla_i ({}^* F)^{ih} = o$$

Nous avons tenté d'utiliser l'équation (II.39) pour définir le courant et l'équation (II.37) pour obtenir un rotationnel, mais

les équations du champ obtenues sont fort complexes et de nombreuses difficultés nous ont contraint à les abandonner.

2) Les difficultés rencontrées dans les tentatives précédentes nous ont conduit à supposer que $g^{oh} \equiv o$, et à remplacer l'une ou l'autre des équations de Maxwell par une condition imposée a priori aux variables de champ.

a)Nous obtiendrons une théorie du type Einstein-Schrödinger si nous utilisons l'équation (II.37) pour définir le potentiel du champ électromagnétique. Nous devons alors normer le vecteur q_i , car une norme imposée à Γ_i modifierait cette équation (II.37). Nous devons en outre lier le vecteur q_i au courant par une condition a priori, ce qui nous conduit à choisir le lagrangien :

$$\left[R_{jh}\cdot g^{jh} - p^2\cdot \varphi_{jh}\cdot g^{jh} - \rho\cdot(g^{jh}\cdot q_j\cdot q_h - a^2)\right]\sqrt{-g}$$

(II.74)

$$+ A_k \left(\varepsilon^{ijhk}\cdot\partial_h g_{ij} - 2\, b\, q_i\cdot \mathcal{J}^{ik} \right) \quad (a,b \text{ scalaires})$$

Considérons les φ^{jh} , Γ^{i}_{jh} , q_j, A_k , ρ comme des variables indépendantes et appliquons un principe variationnel au lagrangien précédent.

Les équations de liaison sont alors

(II.75) $$D_h\, g^{ij} = o \qquad \partial_i\, \mathcal{J}^{ij} = o$$

et les équations du champ s'écrivent :

$$q_j\cdot q_h\cdot g^{jh} = a^2$$

(II.76)

$$\rho\cdot q_j\cdot g^{jh} + b\cdot A_j\cdot g^{jh} = o$$

$$\varepsilon^{ijhk}\cdot\partial_h \varphi_{ij} = b\, q_i\cdot g^{ik}\cdot\sqrt{-g}$$

Pour trouver l'équation qui résulte de la variation des $\mathcal{G}^{jh}$, nous calculons :

$$K = \int_C A_k \cdot \delta (\partial_h g_{ij}) \cdot \varepsilon^{ijhk} \cdot d\tau$$

Nous avons :

$$K = \int_C \partial_h \left[A_k \varepsilon^{ijhk} \delta g_{ij} \right] d\tau + \int_C \varepsilon^{ijhk} \cdot \delta g_{ij} \cdot \partial_h A_k \cdot d\tau \tag{II.78}$$

D'autre part, la relation

$$g_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ih} = \sqrt{-g}\, \delta^h_j$$

donne :

$$\delta g_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} \cdot g_{pq} \cdot \delta \mathcal{G}^{pq} - g_{iq} \cdot g_{pj} \cdot \delta \mathcal{G}^{pq} \tag{II.79}$$

Si les $\delta \mathcal{G}^{pq}$ sont nuls sur le bord de C, les δg_{ij} le sont aussi et la première intégrale du second membre de l'équation (II.78) est nulle, d'après le théorème de Stokes. Il en résulte que :

$$K = \int_C \frac{\varepsilon^{ijhk}}{\sqrt{-g}} (\partial_h A_k) \left[\frac{1}{2} g_{ij} \cdot g_{pq} \cdot \delta \mathcal{G}^{pq} - g_{pj} \cdot g_{iq} \cdot \delta \mathcal{G}^{pq} \right] d\tau \tag{II.80}$$

Nous en déduisons l'équation relative à $\mathcal{G}^{jh}$

$$\begin{aligned} o = {} & R_{jh} + p^2 U_{jh} + \varepsilon^{pqmn} (\partial_m A_n) \left[\frac{1}{2} g_{pq} \cdot g_{jh} - g_{jq} \cdot g_{ph} \right] \\ & - \rho \left[q_j \cdot q_h - \frac{a^2}{2} \cdot g_{jh} \right] - b \left[q_j A_h + q_h A_j \right] \end{aligned} \tag{II.81}$$

De l'équation (II.76,2) il résulte que :

(II.82) $$b.A_j = - \rho.q_j$$

d'où

$$o = R_{jh} + p^2.U_{jh} + 2.\rho.q_j.q_h - \rho\left(q_j.q_h - \frac{a^2}{2}.g_{jh} \right)$$

(II.83) $$+ \frac{1}{b} \cdot \frac{\varepsilon^{pqmn}}{\sqrt{-g}} \cdot \left[g_{jq}.g_{ph} - \frac{1}{2}\, g_{pq}.g_{jh} \right] \cdot \partial_m (\rho q_n)$$

Si nous supposons que le vecteur q_i est proportionnel au vecteur vitesse unitaire, nous obtenons dans le second membre de (II.83) un tenseur matériel qui n'a pas une forme satisfaisante.

b) Nous obtiendrons une théorie du type Einstein-Tonnelat en supposant, a priori, que le tenseur φ_{ij} est un rotationnel. Pour établir une relation entre le vecteur courant et le vecteur vitesse unitaire, nous devons normer a priori le vecteur Γ_i.

Nous choisissons donc le lagrangien :

$$R_{ij}\, \mathscr{G}^{ij} - p^2.\varphi_{ij}.\mathscr{G}^{ij} - \rho.(\mathscr{G}^{ij}.\Gamma_i\Gamma_j - a^2).\sqrt{-g}$$

(II.84) $$+ A_k . \varepsilon^{ijhk} . \partial_h \varphi_{ij} \qquad (\rho \text{ et } a \text{ scalaires})$$

auquel nous appliquons un principe variationnel en considérant les $\Gamma_i{}^h{}_j$, A_k, ρ, $\mathscr{G}^{jh}$ comme les variables indépendantes. Les variations des $\mathscr{G}^{jh}$ et des $\Gamma_i{}^h{}_j$ sont supposées nulles sur le bord du domaine d'intégration.

Le calcul qui a été effectué dans le cas précédent nous permet d'écrire les équations du champ :

$$\partial_i \underset{\vee}{\varphi}^{ij} = \frac{3}{2}\rho \cdot \underset{\vee}{\varphi}^{hj} \cdot \Gamma_h$$

(II.85) $$D_h \underset{+-}{\varphi}^{ij} = \frac{2}{3} \cdot \delta^i_h \cdot \partial_p \underset{\vee}{\varphi}^{pj}$$

$$\Gamma_i \cdot \Gamma_j \, g^{ij} = a^2$$

$$R_{ij}(L) + p^2 U_{ij} - \rho\left(\Gamma_i \cdot \Gamma_j - \frac{1}{2} a^2 \cdot g_{ij}\right)$$

$$-(\partial_m A_n) \cdot \frac{\varepsilon^{pqmn}}{\sqrt{-g}} \cdot \left(\frac{1}{2} g_{ij}\, g_{pq} - g_{pj} \cdot g_{iq}\right) = 0$$

$$\varepsilon^{ijkq} \cdot \partial_h \varphi_{ij} = 0 .$$

La dernière équation entraîne l'existence locale d'un champ de vecteurs φ_i dont φ_{ij} est localement le rotationnel

(II.86) $$\varphi_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i$$

Pour que φ_{ij} soit un rotationnel défini globalement, il suffit de supposer qu'il existe, sur toute la variété V_4, un champ de vecteurs φ_i et que la condition (II 86) est vérifiée a priori.

Il convient alors d'ajouter au lagrangien le multiplicateur de Lagrange

(II.87) $$Q^{ij} \cdot \left[\varphi_{ij} - (\partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i)\right] \cdot \sqrt{-g}$$

où Q^{ij} est un tenseur antisymétrique arbitraire.

La variation de φ_i donne :

(II.88) $$\partial_i (Q^{ij} \cdot \sqrt{-g}) = 0$$

et cette équation entraîne l'existence locale d'un vecteur A_m tel que

$$Q^{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^{ijpq}}{\sqrt{-g}} \cdot (\partial_p A_q - \partial_q A_p) . \qquad \text{II.89)}$$

Nous retrouvons les équations (II.85), mais ici A_p est défini localement tandis que φ_{ij} est le rotationnel de φ_j sur toute la variété V_4 .

Conclusions

L'introduction de nouvelles variables de champ semblait devoir permettre la construction de nombreuses extensions de la théorie unitaire asymétrique.

Mais en fait, la proportionnalité du vecteur courant et du potentiel électromagnétique qui résulte de l'assimilation de ce potentiel au vecteur de torsion de la connexion, l'apparition de tenseurs du type matière-pure qui n'ont pas la forme classique, la complication des équations du champ, l'absence d'interprétation physique pour certaines d'entre elles, font perdre tout intérêt à la plupart des systèmes d'équations du champ que l'on peut former à l'aide d'un principe variationnel.

Néanmoins, nous retrouvons dans des cas particuliers la théorie d'Einstein-Schrödinger, celle de Mme M.A. Tonnelat et celle de W.B. Bonnor .

En outre, nous avons construit un système d'équations du champ dans lequel se trouve un tenseur d'impulsion-énergie qui généralise celui du schéma matièrepure-champ électromagnétique. Au Chapitre IV, nous examinerons si ce système permet de trouver les équations du mouvement par la méthode du tenseur d'énergie.

CHAPITRE III

LES IDENTITES DE CONSERVATION

Les composantes du tenseur de Ricci vérifient quatre identités de conservation qui peuvent être obtenues par deux méthodes.

a) La plus ancienne dont le principe est dû à A. Weyl consiste, dans la forme que lui a donné A. Lichnerowicz, à calculer la dérivée de Lie de l'intégrale d'action.

Nous allons appliquer cette méthode dans le cas où le lagrangien a la forme :

$$\mathcal{G}^{pq} \cdot H_{pq}\left(\Gamma^{i}_{jh}\,,\ \partial_p \Gamma^{i}_{j\,h}\right) + \mathcal{L}\,. \tag{III.1}$$

où H_{pq} est un tenseur qui ne dépend que des coefficients de la connexion affine $\Gamma^{i}_{j\,h}$ (et de leurs dérivées premières) définie sur une variété V_n munie d'un tenseur fondamental g^{pq}, et $\mathcal{L}$ une densité scalaire indépendante des coefficients de la connexion. Ce cas se présente naturellement dans les généralisations de la théorie unitaire.

Nous montrerons que ces identités ont toujours la même expression en fonction de H_{pq} et de $\mathcal{G}^{pq}$, quelle que soit la forme du tenseur H_{pq} et quelle que soit la densité $\mathcal{L}$.

Nous donnerons deux définitions du tenseur d'énergie. La première nous sera utile pour les équations du mouvement, la seconde servira à l'étude du champ gravitationnel de spin.

b) Une seconde méthode basée sur l'emploi des identités de Bianchi a été indiquée par Melle S. Mavridès (1) .

En Relativité Générale, les identités de conservation résultent uniquement de la définition du tenseur de Ricci et de celle des symboles de Christoffel équivalents à

$$\nabla_i \mathcal{G}^{jh} = 0 \tag{III.2}$$

Dans la théorie unitaire non-symétrique, les identités de E. Cartan relatives à la connexion affine et les équations de liaison

$$D_i \mathcal{G}^{(jh)} = 0 \qquad \partial_i \mathcal{G}^{[jh]} = 0 \tag{III.3}$$

ont pour conséquence les identités de conservation.

2. LES IDENTITES DE BIANCHI

Nous savons que les identités de Bianchi relatives à la forme de courbure Ω^i_j associée à la matrice de connexion (ω^i_j) conduisent aux identités de E. Cartan.

$$\begin{aligned} 0 \equiv {} & D^+_m R^i_{j,hl} + D^+_h R^i_{j,lm} + D^+_l R^i_{j,mh} \\ & + 2 R^i_{j,kl} \cdot \Gamma^{[k}_{lm} + 2 R^i_{j\,km} \cdot \Gamma^{[k}_{lh} + 2 R^i_{j,kh} \Gamma^{[k}_{ml} \end{aligned} \tag{III.4}$$

Dans lesquelles D^+_m est l'opérateur de dérivation covariante + . Ces identités seront donc certainement vérifiées dans la généralisation de la théorie et nous allons chercher si les identités de Bianchi relatives à la forme $\Omega^{*\alpha}_{\beta}$ associée à la matrice $(\omega^{\alpha}_{\beta})$ ne conduisent pas à de nouvelles identités.

De la définition des $\Omega^{*\alpha}_{\beta}$

$$\Omega^{*\alpha}_{\beta} \equiv d\omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta} \tag{III.5}$$

(1) C.R. Acad. Sc. Fr. 1957. 244. p.2482.

Les indices latins prennent les valeurs 1,2,3,4, les indices grecs prennent les valeurs 0,1,2,3,4.

nous déduisons par un calcul classique que :

$$(III.6) \qquad d\,\Omega^{*\alpha}{}_{\beta} \equiv \Omega^{*\alpha}{}_{\beta} \wedge \omega^{\rho}{}_{\beta} - \omega^{\alpha}{}_{\rho} \wedge \Omega^{*\rho}{}_{\beta}$$

De la définition (III.5) nous pouvons déduire par un calcul facile l'identité :

$$(III.7) \qquad d\,\Omega^{*i}{}_{j} - (\Omega^{*i}{}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}{}_{j} - \omega^{i}{}_{\alpha} \wedge \Omega^{*\alpha}{}_{j}) \equiv$$

$$d\,\Omega^{i}{}_{j} - (\Omega^{i}{}_{h} \wedge \omega^{h}{}_{j} - \omega^{i}{}_{h} \wedge \Omega^{h}{}_{j})$$

et nous avons posé :

$$(III.8) \qquad \Omega^{i}{}_{j} \equiv d\,\omega^{i}_{j} + \Gamma^{i}{}_{h} \wedge \omega^{h}{}_{j} \ .$$

l'identité relative à $d\Omega^{*i}{}_{j}$ se réduit donc à l'identité de Bianchi

$$(III.9) \qquad d\Omega^{i}{}_{j} = \Omega^{i}{}_{h} \wedge \omega^{h}{}_{j} - \omega^{i}{}_{h} \wedge \Omega^{h}{}_{j}$$

pour la connexion linéaire $\Gamma^{h}{}_{i\,j}$, d'où résultent les identités de E. Cartan (III.4)

Le calcul de $d\,\Omega^{*i}{}_{o}$, $d\,\Omega^{*o}{}_{i}$, $d\,\Omega^{*o}{}_{o}$ donne des identités triviales. Les identités de Bianchi relatives à $\Omega^{*\alpha}{}_{\beta}$ conduisent donc uniquement aux identités de E. Cartan (III.4). Si $p^{1}{}_{h} \equiv \delta^{i}{}_{h}$, l'identité relative à $d\,\Omega^{*i}{}_{o}$ devient l'identité de Bianchi relative au tenseur de torsion de la connexion linéaire $\Gamma^{h}{}_{i\,j}$.

3 - <u>IDENTITES DE CONSERVATION</u>

Si une théorie unitaire est basée sur l'emploi de la structure géométrique précédemment définie et si dans cette théorie, les équations d'Einstein

$$(III.10) \qquad D_{h}\,\mathcal{G}^{\underline{i}\,\underline{j}} = 0 \qquad \partial_{i}\,\mathcal{G}^{i\,j} = 0$$

sont vérifiées, la méthode de Melle S. Mavridès permet de tirer des équations (III.10) et des identités de E. Cartan (III.4) les identités de conservation

$$\partial_i (R_{jh} . \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{G}^{ji} . R_{jh}) - \mathcal{G}^{ij} . \partial_h R_{ij} = 0 \qquad \text{(III.11)}$$

Ce résultat s'applique à toute théorie obtenue en appliquant un principe variationnel à un lagrangien de la forme

$$\mathcal{G}^{pq} . R_{pq} + \mathcal{L}$$

où R_{pq} est le tenseur de Ricci associé à la connexion linéaire Γ^h_{ij} et $\mathcal{L}$ une densité scalaire indépendante de cette connexion, car dans une telle théorie les équations d'Einstein sont vérifiées.

En particulier ce résultat s'applique à la théorie de W.B. Bonnor.

4 - UN THEOREME SUR LES IDENTITES DE CONSERVATION

Considérons sur une variété V_n une connexion linéaire Γ^k_{ij} . Désignons par I l'intégrale d'action étendue à une chaîne C de V_n

$$I = \int_C \left[H_{pq} (\Gamma^h_{ij}, \partial_k \Gamma^h_{ij}) . \mathcal{G}^{pq} + \mathcal{L} \right] . d\tau \qquad \text{(III.12)}$$

dans laquelle H_{pq} désigne un tenseur qui ne dépend que de Γ^h_{ij} et de ses dérivées tandis que $\mathcal{L}$ est une densité scalaire indépendante de la connexion.

Etudions les identités de conservation par la méthode de Weyl

a) si nous postulons que les variations des $\mathcal{G}^{pq}$ et des Γ^{h}_{ij} sont indépendantes et s'annulent sur le bord de C, les équations du champ, relatives aux variables Γ^{h}_{ij} et $\mathcal{G}^{pq}$ s'écrivent :

$$G^{ij}_{l} \equiv \frac{\partial(H_{pq}.\mathcal{G}^{pq})}{\partial \Gamma^{h}_{ij}} - \partial_{s}.\left(\frac{\partial(H_{pq}.\mathcal{G}^{pq}}{\partial(\partial_{s}\Gamma^{h}_{ij})}\right) = 0 \qquad \text{(III.13)}$$

$$H_{pq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{pq}} = 0 \qquad \text{(III.14)}$$

b) Soit ξ^{i} un champ de vecteurs qui s'annule sur le bord de C.

Si K est une densité scalaire quelconque la dérivée de Lie de l'intégrale

$$J = \int_{C} K\sqrt{-g}.d\tau \qquad \text{(III.15)}$$

est définie par

$$XJ = \int_{C} X\,K\sqrt{-g}\,.d\tau \qquad \text{(III.16)}$$

Un calcul classique montre que :

$$X\,J = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Il en résulte que :

$$\int_{C} X(\mathcal{L}\,d\tau) = 0 \qquad \int_{C} X(H_{pq}.\mathcal{G}^{pq}.d\tau) = 0 \ ; \qquad \text{(III.18)}$$

b) Si les dérivées des deux premiers ordres de ξ^{i} s'annulent sur le bord de C, nous avons sur ce bord pour les dérivées de Lie de Γ^{h}_{ij}

$$X\,\Gamma^{h}_{ij} = 0\,. \qquad \text{(III.19)}$$

D'autre part puisque $\mathcal{L}$ est indépendante de la connexion

$$\text{(III.20)}\quad \int_C (X\, H_{pq}).\mathcal{G}^{pq}.d\tau = \int_C G_h^{ij}(X\Gamma^h_{ij})d\tau + \oint_s \left(\frac{\partial H_{pq}.\mathcal{G}^{pq}}{\partial \partial_s \Gamma^h_{ij}}.X\Gamma^h_{ij}\right).d\tau$$

Si nous supposons que $\mathcal{G}^{pq}$ et Γ^h_{ij} constituent une solution des équations (III.13), la première intégrale du second membre est nulle. La seconde est nulle aussi d'après le théorème de Stokes puisque $X\Gamma^h_{ij}$ est nul sur le bord de C .

La relation (III.13) donne enfin

$$\text{(III.21)}\quad XI = \int_C H_{pq}\,.\,(X\,\mathcal{G}^{pq}).\,d\tau$$

La dérivée de Lie de g^{pq}

$$\text{(III.22)}\quad X\,g^{pq} = \xi^i\,.\,\partial_i\,g^{pq} - g^{iq}\,.\,\partial_i\,\xi^p - g^{pi}\,.\,\partial_i\,\xi^q$$

et la formule de dérivation logarithmique de $\sqrt{-g}$

$$\text{(III.23)}\quad \frac{\partial\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = -\,1/2\,.\,g_{pq}\,.\,X\,g^{pq} = -\,1/2\;\xi^i.g_{pq}.\partial_i\,g^{pq} - 2\partial_i\xi^i$$

$$= \frac{\partial_i(\xi^i.\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

permettent d'écrire

$$\text{(III.24)}\quad X\,\mathcal{G}^{pq} = \xi^i\,.\,\partial_i\,\mathcal{G}^{pq} + \mathcal{G}^{pq}.\partial_i\,\xi^i - \mathcal{G}^{iq}.\partial_i\,\xi^p - \mathcal{G}^{pi}.\partial_i\,\xi^q$$

La relation (III.21) prend la forme :

$$\text{(III.25)}\quad XI = \int_C \xi^i.\left[H_{pq}.\partial_i\mathcal{G}^{pq} - \partial_i(H_{pq}.\mathcal{G}^{pq}) + \partial_p(H_{iq}.\mathcal{G}^{pq}) + \partial_p(H_{qi}.\mathcal{G}^{qp})\right]d\tau$$

Si les ξ^i sont nuls sur le bord de C ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, la dérivée de Lie de I est nulle, quels que soient les ξ^i. Il en résulte que :

(III.26) $$0 \equiv \partial_p H_{iq} \cdot \mathcal{G}^{pq} + H_{qi} \mathcal{G}^{qp} - \partial_i H_{pq} \cdot \mathcal{G}^{pq} + H_{pq} \cdot \partial_i \mathcal{G}^{pq}$$

Ces identités sont satisfaites pour toute solution $(g_{pq}, \Gamma^{i}_{jh})$ des équations (III.13)

Théorème . Tout tenseur H_{pq} qui ne dépend que des coefficients $\Gamma^{h}_{i\,j}$ d'une connexion linéaire asymétrique et de leurs dérivées premières, coefficients définis sur une variété différentiable V_4 munie d'un tenseur fondamental g_{ij} asymétrique, vérifie les identités (III.26) pour toute solution $(g_{ij}, \Gamma^{r}_{pq})$ des équations d'Euler relatives à la variable $\Gamma^{r}_{p\,q}$ et à l'intégrale :

$$\int_C (H_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}) \, d\tau$$

où $\mathcal{L}$ est une densité scalaire indépendante de la connexion.

5 - Une autre forme des identités de conservation

Au Chapitre II nous avons obtenu des systèmes d'équations du champ en appliquant un principe variationnel à des intégrales de la forme :

(III.27) $$K = \int_C \left[H_{ij}(\rho, \Gamma^{r}_{p\,q}, \partial_s \Gamma^{r}_{p\,q}) \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}(\rho ; A_i , q_h , \mathcal{G}^{ij}) \right] d\tau$$

où H_{ij} est un tenseur qui ne dépend que du scalaire ρ , des coefficients $\Gamma^{r}_{p\,q}$ de la connexion linéaire et de leurs dérivées premières, tandis que $\mathcal{L}$ est une densité scalaire qui dépend explicitement de ρ , de $\mathcal{G}^{ij}$, des vecteurs A_i et q_h , mais qui est indépendante de la connexion.

Un raisonnement identique à celui qui a été fait dans le paragraphe précédent permet d'écrire la dérivée de Lie de K :

$$X\,K = \int_c \left[G^{i}{}_{h}{}^{j} \left(\partial \Gamma_{i}{}^{h}{}_{j} \right) + H_{ij}\, X \mathcal{G}^{ij} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{ij}} . X\, \mathcal{G}^{ij} \right] . d\tau$$

$$+ \int_c \left[\left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) X \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} X\, A_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} X q_j \right] . d\tau$$

Si les équations d'Euler relatives respectivement aux variables ρ, A_i, q_j, et $\Gamma_{i}{}^{h}{}_{j}$ sont vérifiées, c'est à dire si :

$$\mathcal{G}^{ij} . \frac{\partial H_{ij}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

(III.28)

$$G^{i}{}_{h}{}^{j} = 0 \quad ,$$

la dérivée de Lie de K devient :

$$0 = X\,K = \int_c \left(H_{ij} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{ij}} \right) . X\, \mathcal{G}^{ij} \; . \; d\tau$$

Si l'on pose

$$H^{*}_{ij} = H_{ij} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{ij}}$$

Un calcul analogue à celui qui a été fait dans le paragraphe précédent conduit alors aux identités :

$$0 = \partial_p \left(H^{*}_{iq} . \mathcal{G}^{pq} + H^{*}_{qi} . \mathcal{G}^{qp} \right) - \partial_i \left(H^{*}_{pq} . \mathcal{G}^{pq} \right) + H^{*}_{pq} . \partial_i \mathcal{G}^{pq}$$

(III.29)

$$0 = \partial_p \left(H_{iq} . \mathcal{G}^{pq} + H_{qi} . \mathcal{G}^{qp} \right) - \partial_i \left(H_{pq} . \mathcal{G}^{pq} \right) + H_{pq} . \partial_i \mathcal{G}^{pq}$$

On obtient encore ces identités si H_{ij} et $\mathcal{L}$ dépendent des variables tensorielles ρ , A_i , ... , à condition de supposer que les équations d'Euler relatives à ces variables sont satisfaites.

Théorème. Tout tenseur H_{ij} qui dépend des variables ρ , A_i,..., des coefficients $\Gamma^{r}_{p\,q}$ d'une connexion linéaire asymétrique et de leurs dérivées premières, coefficients définis sur une variété différentielle V_4 munie d'un tenseur fondamental asymétrique g_{ij} , et toute densité scalaire $\mathcal{L}$ exprimée explicitement à l'aide des variables ρ , A_i, ... des $\mathcal{G}^{ij}$, et indépendante de la connexion , vérifient les identités (III.29) pour toute solution ($\mathcal{G}^{ij}$, $\Gamma^{r}_{p\,q}$, ρ , A_i , ..) des équations d'Euler relatives aux variables $\Gamma^{r}_{p\,q}$, ρ , A_i ... et à l'intégrale :

$$\int_c \left(H_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L} \right) . \, d\iota$$

Les identités (III.26) et (III.29) s'appliquent en particulier dans le cas de la théorie linéaire générale de Mme M.A. Tonnelat, dans celui de la théorie de W.B. Bonnor et dans ceux des systèmes d'équations que nous avons formés au Chapitre II.

6. Première définition du tenseur d'impulsion-énergie

Supposons que le tenseur H_{ij} et la densité scalaire $\mathcal{L}$ vérifient les hypothèses du théorème précédent. Les identités (III.29) sont alors satisfaites. Désignons par a_{ij} un tenseur symétrique tel que :

$$a = \text{dét } a_{ij} \neq 0$$

et par G_{pq} le tenseur de Ricci formé à l'aide de la connexion riemannienne associée au tenseur a_{ij} .

Définissons le tenseur d'impulsion-énergie T_{pq} par les identités:

(III.30) $$H^{*+}_{\underline{pq}} - \frac{1}{2}\, a_{pq}\, H^{*}_{\underline{ij}} \cdot a^{ij} = G_{pq} - \frac{1}{2}\, a_{pq} \cdot a^{ij} \cdot G_{ij} - \chi\, T_{pq}$$

dans lesquelles χ désigne la constante de la gravitation .

Remarquons que les équations du champ

(III.31) $$H^{*}_{\underline{pq}} = 0$$

sont équivalentes aux équations :

(III.32) $$G_{pq} - \frac{1}{2}\, a_{pq} \cdot a^{ij} \cdot G_{ij} = \chi \cdot T_{pq}$$

ce qui montre que le tenseur T_{pq} joue le rôle du tenseur d'impulsion-énergie lorsque l'on prend le tenseur a_{ij} comme tenseur métrique .

Les identités de conservation (III.29) peuvent s'écrire :

(III.33) $$\partial_p \left(H^{*}_{\underline{iq}} \cdot \mathfrak{g}^{\underline{pq}} - \frac{1}{2}\,\delta^{p}_{i} \cdot H^{*}_{\underline{qh}} \cdot \mathfrak{g}^{\underline{qh}}\right) + \frac{1}{2}\, H^{*}_{\underline{pq}} \cdot \partial_i \mathfrak{g}^{\underline{pq}} + H^{*}_{\underline{iq}} \cdot \partial_p \mathfrak{g}^{\underline{pq}} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}^{\underline{pq}} \left(\partial_i H^{*}_{\underline{pq}} + \partial_p H^{*}_{\underline{qi}} + \partial_q H^{*}_{\underline{ip}}\right)$$

Si l'on choisit, à l'exemple de J. Hély et de Pham Tam Hoang [46], le tenseur métrique a_{ij} défini par :

(III.34) $$a^{ij} = h^{ij} \cdot \sqrt{-\frac{h}{g}} \quad ; \quad a_{ij} \cdot a^{ip} = \delta^{p}_{j}$$

on a la relation :

(III.35) $$g^2 = ah$$

et les identités de conservation deviennent :

(III.36) $$\overset{a}{\nabla}_q \left(S^{q}_{i} - \chi \cdot T^{q}_{i}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot H^{*}_{\underline{ip}} \cdot \partial_q \mathfrak{g}^{\underline{qp}} = \frac{1}{2}\, g^{\underline{pq}} \cdot \sqrt{-\frac{h}{g}} \left(\partial_i H^{*}_{\underline{pq}} + \partial_p H^{*}_{\underline{qi}} + \partial_q H^{*}_{\underline{ip}}\right)$$

où les indices élevés à l'aide du tenseur a^{ij} ont été soulignés et où $\overset{a}{\nabla}_q$ désigne l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion riemannienne définie par le tenseur métrique a_{ij}.

Le tenseur S_{ij} étant conservatif, nous obtenons enfin :

$$(III.37)\quad \overset{a}{\nabla}_q (\chi\, T^q_i) \equiv \frac{1}{\sqrt{-a}}\, \underset{\sim}{H^*_{ip}}\, \partial_q \mathcal{G}^{qp} - \frac{1}{2}\, g^{pq} \sqrt{\frac{h}{g}}\, (\partial_i \underset{\sim}{H^*_{pq}} + \partial_p \underset{\sim}{H^*_{qi}} + \partial_q \underset{\sim}{H^*_{ip}})$$

L'identité $\overset{a}{\nabla}_q (\chi\, T^q_i) \equiv 0$ est donc vérifiée pour toute solution des équations de liaison sous la seule condition que

$$\underset{\sim}{H^*_{ij}} = 0$$

7 - DEUXIEME DEFINITION DU TENSEUR D'IMPULSION-ENERGIE

Nous supposons que la densité scalaire $\mathcal{L}$ est un terme symbolique qui ne dépend que des g^{ij} et qui permet de définir le tenseur d'impulsion-énergie T_{pq} par :

$$(III.38)\quad T_{pq} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{pq}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{pq}} - 1/2 \cdot g_{pq} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}^{ij}} \cdot g^{ij}$$

Ces hypothèses sont celles que l'on fait dans la théorie de l'effet gravitationnel de spin.

Les équations du champ (III.14) sont équivalentes aux équations

$$(III.39)\quad H_{pq} - 1/2\, g_{pq}\, (H_{ij}\, g^{ij}) = T_{pq}$$

et elles permettent d'écrire les identités (III.26) sous la forme:

$$(III.40)\quad \partial_p \left[T_{iq} \cdot \mathcal{G}^{pq} + T_{qi} \cdot \mathcal{G}^{qp} \right] + H_{pq} \cdot \partial_i \mathcal{G}^{pq} = 0$$

Si nous tenons compte des relations

$$(III.41)\quad \partial_i \mathcal{G}^{pq} = + \sqrt{-g} \cdot \left[\partial_i g^{pq} - 1/2\ g^{pq} \cdot g_{hk} \cdot \partial_i g^{hk} \right],$$

nous obtenons les équations de conservation du tenseur d'impulsion-énergie T_{pq}

$$\text{(III.42)} \qquad \partial_p \left[T_{iq} \cdot \mathfrak{g}^{pq} + T_{qi} \cdot \mathfrak{g}^{pq} \right] + \sqrt{-g} \cdot T_{pq} \cdot \partial_i \, \varepsilon^{pq} = 0$$

Ces équations ont été obtenues par Sciama dans le cas particulier où H_{pq} est le tenseur de Ricci R_{pq} formé avec les Γ^{h}_{ij} .[56]

Théorème Tous les lagrangiens de la forme :

$$\mathfrak{g}^{pq} \cdot H_{pq} \left(\Gamma^{h}_{ij} , \partial_s \Gamma^{h}_{ij} \right) + \mathfrak{L}$$

où H_{pq} désigne un tenseur qui ne dépend que des coefficients Γ^{h}_{ij} (et de leurs dérivées premières) d'une connexion linéaire définie sur une variété V_n et $\mathfrak{L}$ une densité scalaire symbolique qui ne dépend que des g^{ij}, donnent comme conséquence des équations du champ (III.14), les équations de conservation du tenseur d'impulsion-énergie T_{pq} défini par (III.42)

Conclusion. Les identités de conservation des généralisations de la théorie unitaire asymétrique ont donc la même forme que celle de la théorie d'Einstein-Schrödinger.

C H A P I T R E IV

LA THEORIE DE BONNOR ET L'UNE DE SES EXTENSIONS

A - LA THEORIE DE BONNOR [28]

Nous nous proposons dans ce Chapitre d'étudier deux problèmes relatifs à la théorie de Bonnor.

Nous montrerons d'abord que les équations du champ forment un système compatible en étudiant le problème de Cauchy. Ensuite nous prouverons que ce système admet une solution à symétrie sphérique qui rappelle la solution obtenue en Relativité Générale par Reissner et Nordström.

1. LE PROBLEME DE CAUCHY [12]

Considérons une variété espace-temps V_4 munie d'une connexion linéaire $\Gamma i^h j$ et d'un tenseur fondamental g^{ij} non symétriques. Soient Rjh le tenseur de Ricci formé avec cette connexion $\Gamma i^h j$ et $\mathscr{G}$ une densité scalaire qui ne dépend que des g^{ij} en fonction desquels, nous la supposons explicitement exprimée.

Le principe variationnel appliqué au lagrangien

$$Rjh \cdot \mathscr{G}^{jh} + \mathscr{L}$$

conduit aux équations du champ :

$$\text{(IV.1)} \qquad \begin{aligned} D_i \mathscr{G}^{jh} &= 0 \\ \partial_i \mathscr{G}^{ij} &= 0 \end{aligned}$$

$$R_{jh}(L) = R_{jh}(L) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{G}^{jh}} = \frac{2}{3}\left(\partial_j \Gamma h - \partial_h \Gamma j\right)$$

D_i désigne l'opérateur de dérivation covariante formé avec la connexion $Li^h j$ dont le vecteur de torsion est nul

$$Li^{h}{}_{j} = \Gamma\, i^{h}{}_{j} + \frac{2}{3} \cdot \delta^{h}_{i} \cdot \Gamma_{j}$$

et Γ_{j} est le vecteur de torsion de $\Gamma\, i^{h}{}_{j}$

Nous avons établi au Chapitre III que pour toute solution $(Li^{h}{}_{j},\ g^{ij})$ des équations (IV.1,1) et (IV.1,2) le tenseur R_{jh} vérifie les identités de conservation :

$$\partial_{i}\left[R^{*}_{jp}\, \mathcal{G}^{ip} + R^{*}_{pj}\, \mathcal{G}^{pi} \right] - \mathcal{G}^{pq} \cdot \partial_{j} R^{*}_{pq} = 0 \qquad \text{(IV.2)}$$

Nous avons donc exactement les mêmes relations que dans la théorie d'Einstein-Schrödinger à condition de remplacer $R_{jh}(L)$ par $R^{*}_{jh}(L)$.

Pour résoudre le problème de Cauchy, il suffit de répéter tous les raisonnements qui ont été faits par M.A. Lichnerowicz dans le cas des équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger. Nous avons déjà rappelé les principaux résultats de cette étude dans le Chapitre II. En particulier les variétés caractéristiques sont les mêmes dans les deux théories.

2. SOLUTIONS A SYMETRIE SPHERIQUE

W.B. Bonnor a cherché en vain une solution à symétrie sphérique des équations du champ de sa théorie [24]. Nous allons appliquer à ce problème la méthode de l'hamiltonien, qui n'est pas très rigoureuse, mais qui conduit parfois - c'est le cas dans le problème de Schwarzschild - à des calculs plus simples que les autres méthodes. [3] [35]

En Relativité Générale, on transforme l'intégrale d'action

$$\int_c R_{ij} \, \varphi^{ij} \, d\tau$$

en utilisant les identités qui lient les φ^{ij} aux symboles de Christoffel, ce qui permet de lui donner la forme :

$$\int_c \varphi^{ij} \left[\begin{Bmatrix} t \\ ih \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ tj \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} t \\ ij \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ th \end{Bmatrix} \right] d\tau$$

Il n'est pas possible de procéder de la même façon en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger, car les relations entre les coefficients de connexion et les φ^{ij} sont des équations qui ne peuvent être utilisées pour transformer le lagrangien.

Nous allons montrer qu'il est possible de trouver les équations de la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger en appliquant un principe variationnel à l'intégrale

$$\int_c R_{ij} \, \varphi^{ij} \, d\tau$$

dans laquelle on suppose que les coefficients de connexion sont exprimés explicitement en fonction des variables φ^{ij}.

a) Un théorème sur les équations du champ

Considérons une connexion $L_{i\ j}^{\ h}$, solution des équations

$$\partial_k \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{G}^{ih} \cdot L_{k\ h}^{\ j} + \mathcal{G}^{hj} \cdot L_{h\ k}^{\ i} - \mathcal{G}^{ij} \cdot L_{k\ h}^{\ h} = 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

$$L_{i\ h}^{\ h} = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Il résulte de ces équations que les $\mathcal{G}^{ij}$ sont soumis, a priori, à la condition :

$$\partial_j \underset{\sim}{\mathcal{G}}^{ij} = 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

Soit W_{ij} le tenseur de Ricci associé à la connexion $L_{i\ j}^{\ h}$

Considérons l'intégrale d'action :

$$I = \int_c W_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} \cdot d\tau$$

Pour tenir compte de la condition (IV.5), nous introduirons un multiplicateur de Lagrange dans cette intégrale que nous écrirons :

$$I = \int_c \left[W_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \frac{4}{3} \cdot \Gamma_i \cdot \partial_j \underset{\sim}{\mathcal{G}}^{ij} \right] d\tau$$

en désignant par Γ_i un vecteur arbitraire.

Calculons les variations de $\mathcal{G}^{ij} \cdot W_{ij}$:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{G}^{ij} \cdot W_{ij}) = {} & W_{ij} \cdot \delta \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{G}^{ij} \cdot \left[\delta L_{i\ j}^{\ h} \cdot L_{h\ t}^{\ t} + \right. \\ & \left. + L_{i\ j}^{\ h} \cdot \delta L_{h\ t}^{\ t} - \delta L_{i\ t}^{\ h} \cdot L_{h\ j}^{\ t} - L_{i\ t}^{\ h} \cdot \delta L_{h\ j}^{\ t} \right] \\ & + \partial_h (\mathcal{G}^{ij} \cdot \delta L_{i\ j}^{\ h}) - (\partial_h \mathcal{G}^{ij}) \cdot \delta L_{i\ j}^{\ h} - \partial_j (\mathcal{G}^{ij} \cdot L_{ih}^{h}) \\ & + (\partial_j \mathcal{G}^{ij}) \cdot \delta L_{i\ h}^{\ h} \end{aligned} \qquad \text{(IV-6)}$$

Reportons dans l'égalité (IV.6) les valeurs de $\partial_h \mathcal{G}^{ij}$ et de $\partial_j \mathcal{G}^{ij}$ tirées de (IV.3) et (IV.4) ; nous obtenons :

IV.7) $$\delta(\mathcal{G}^{ij}.\ W_{ij}) = W_{ij}.\ \delta\mathcal{G}^{ij} + \partial_h(\mathcal{G}^{ij}.\delta L_{ij}^{\ h}) - \partial_j(\mathcal{G}^{ij}\ L_{ih}^{\ h})$$

Supposons que les variations des $\mathcal{G}^{ij}$ soient nulles sur le bord de C. Il résulte alors des équations (IV.3) que les δL_{ij} sont nuls sur le bord de C et les intégrales

IV.8) $$\int_C \partial_h(\mathcal{G}^{ij}.\delta L_{ij}^{\ h})\,d\tau \quad ; \quad \int_C \partial_j(\mathcal{G}^{ij}.\ L_{ih}^{\ h})\,d\tau ; \int_C \partial_j(\Gamma_i \delta\mathcal{G}^{ij})\,d\tau$$

sont nulles d'après le théorème de Stokes

Il en résulte que

IV.9) $$\delta I = \int_C \left\{\left[W_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i)\right]\delta\mathcal{G}^{ij} + \frac{4}{3}(\partial_j \mathcal{G}^{ij}_{\vee}).\ \delta\Gamma_i\right\} d\tau$$

et nous retrouvons en annulant I les équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger.

IV.10) $$W_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i) = 0$$

ainsi que l'équation (IV.5) équivalente à (IV.4) qui a été postulée à priori.

Si nous supposons que les $\delta\Gamma_i$ sont nuls sur le bord de C, l'intégrale

IV.11) $$J = \int_C \left[W_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i)\right].\ d\tau$$

a la même variation que l'intégrale I .

<u>Théorème</u>. La variation de l'intégrale

$$\int_C \left[W_{ij} - \frac{2}{3}(\partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i)\right]\mathcal{G}^{ij}\ d\tau$$

dans laquelle le tenseur de Ricci W_{ij} associé à la connexion $L_{i\ j}^{\ h}$ est supposé exprimé en fonction des variables $\mathcal{G}^{ij}$ par l'intermédiaire des équations de liaison,

$$\partial_j \mathcal{G}^{ij} = 0 \qquad D_h \mathcal{G}^{ij} = 0$$

conduit aux équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger à condition de supposer que les variations des $\mathcal{G}^{ij}$ et des Γ_i sont nulles sur le bord de C.

b. Une autre forme de ce théorème

Une intégration par parties donne

$$J = \int_C \Big[\partial_h(\mathcal{G}^{ij} L_{i\ j}^{\ h}) - (\partial_h \mathcal{G}^{ij}) L_{i\ j}^{\ h} - \partial_j(\mathcal{G}^{ij} L_{i\ h}^{\ h}) + (\partial_j \mathcal{G}^{ij}) L_{i\ h}^{\ h} \Big] d\tau$$

(IV.12)
$$+ \int_C \Big[\mathcal{G}^{ij} (L_{ij}^{\ h} L_{ht}^{\ t} - L_{it}^{\ h} L_{hj}^{\ t}) - \frac{2}{3}(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) \mathcal{G}^{ij} \Big] \ d\tau$$

En tenant compte du fait que les intégrales (8,1) et(8,2) sont nulles et en utilisant les valeurs de $\partial_j \mathcal{G}^{ij}$ et de $\partial_h \mathcal{G}^{ij}$ tirées de (1) et de (2), nous obtenons :

(IV.13)
$$J = \int_C \Big[\mathcal{G}^{tj} (L_{th}^{\ i} L_{ij}^{\ h} - L_{tj}^{\ h} L_{ht}^{\ t}) - \frac{2}{3}(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) \mathcal{G}^{ij} \Big] d\tau$$

Ainsi,

les équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger sont données par la condition

$$0 = \int_C \Big[\mathcal{G}^{ij} (L_{ih}^{\ t} L_{tj}^{\ h} - L_{ij}^{\ h} L_{ht}^{\ t}) - \frac{2}{3} (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) \mathcal{G}^{ij} \Big] \ d\tau$$

les $L_{ij}^{\ h}$ étant des fonctions des $\mathcal{G}^{ij}$ définis par les équations :

$$\partial_j \mathcal{G}^{ij} = 0 \qquad D_h \mathcal{G}^{ij} = 0$$

à condition que les variations des φ^{ij} et celles des Γ_i soient nulles sur le bord de C.

c. Application à la recherche de solutions statiques à symétrie sphérique [3][35][36]

Pour éviter les difficultés qui se présentent en coordonnées polaires, transformons le ds^2 à symétrie sphérique :

IV.14) $$ds^2 = -a^2\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + c^2dt^2$$

en posant

IV.15) $$x = r.\sin\theta.\cos\varphi \quad ; \quad y = r.\sin\theta.\cos\varphi \quad ; \quad z = r.\cos\theta$$

ce qui donne

IV.16) $$ds^2 = -(dx^2+dy^2+dz^2) + \frac{1-a^2}{r^2}(xdx+ydy+zdz)^2 + c^2.dt^2$$

avec $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'intégrale (13) est invariante dans les changements de coordonnées linéaires. Or, par une transformation orthogonale effectuée sur les variables x, y, z et s'exprimant par les formules de transformations rectangulaires, on peut amener un point (x, y, z) quelconque au point P

$$x = r \quad ; \quad y = o \quad ; \quad z = o$$

de l'axe Ox . L'intégrale (13) ne dépend donc des variables x, y, z que par l'intermédiaire de l'expression $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ et il suffit de calculer cette intégrale au point P.

Si nous posons :

$$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \quad ; \quad x_4 = t$$

Nous obtenons en P :

IV.17) $$g_{11} = -a^2 = -\alpha \; ; \quad g_{22} = g_{33} = -1 \; ; \quad g_{44} = c^2 = \sigma$$

$$\partial_1 g_{11} = -2a.\partial_1 a \; ; \quad \partial_1 g_{44} = 2c.\partial_1 c \; ; \quad \partial_2 g_{12} = \partial_3 g_{13} = \frac{1-\alpha}{r^2}$$

tous les autres g_{ij} et toutes les autres dérivées premières des g_{ij} sont nuls, puisque le ds^2 considéré est statique.
Les valeurs des g_{ij} sont, dans le cas de la symétrie sphérique:

$$(\underset{\vee}{g_{ij}}) = \begin{bmatrix} 0 & z\frac{v}{r} & -y\frac{v}{r} & +\frac{x\omega}{r} \\ -\frac{zv}{r} & 0 & x\cdot\frac{v}{r} & y\frac{\omega}{r} \\ y\frac{v}{r} & -x\frac{v}{r} & 0 & z\frac{\omega}{r} \\ -x\frac{\omega}{r} & -y\frac{\omega}{r} & -z\frac{\omega}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

et au point P nous avons :

$$(\underset{\vee}{g_{ij}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supposons que :

$$v \equiv 0$$

Alors en Pi

$$-\partial_2 \underset{\vee}{g_{42}} = \partial_2 \underset{\vee}{g_{24}} = \frac{w}{r} \quad , \quad \partial_3 \underset{\vee}{g_{34}} = -\partial_3 \underset{\vee}{g_{43}} = \frac{\omega}{r}$$

Le tenseur fondamental est ainsi défini par :

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} -\alpha & & \omega \\ & -1 & \\ & & -1 \\ -\omega & & \sigma \end{bmatrix} \qquad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{\omega^2 - \alpha\sigma} & & -1 & & \frac{\omega}{\omega^2 - \alpha\sigma} \\ & & & -1 & \\ \frac{-\omega}{\omega^2 - \alpha\sigma} & & & & \frac{-\alpha}{\omega^2 - \alpha\sigma} \end{bmatrix}$$

D'autre part

$$- g = \quad - \omega^2$$

Les équations d'Einstein

$$\partial_k g^{ij} + g^{ih} \cdot \Delta^{j}_{kh} + g^{hj} \cdot \Delta^{i}_{hk} = 0$$

relatives à une connexion Δ^{h}_{ij} dont le vecteur de est quelconque permettent de calculer ces coefficients Δ^{h}_{ij}

(IV-18) $\Delta^{1}_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial_1 \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha'}{2\alpha}$; $\Delta^{1}_{22} = \Delta^{1}_{33} = -\frac{(1-\alpha)}{r\alpha}$

(IV.19) $\Delta^{2}_{24} = \Delta^{3}_{34} = -\frac{\omega r'}{\alpha r}$; $\Delta^{1}_{44} = \frac{\sigma}{2\alpha} \cdot \partial_1 \log \sigma \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)^2$

(IV.20) $\Delta^{4}_{14} = \frac{1}{2}\partial_1 \log \sigma \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)$; $\Delta^{1}_{14} = \frac{\sigma}{2\omega}\partial_1 \log \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)$

La condition

(IV.21) $$\Delta^{h}_{ih} = 0$$

se traduit par :

(IV.22) $$\frac{4\omega^2}{r\alpha\sigma} = \partial_1 \log \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha\sigma}\right)$$

d'où l'on déduit que :

(IV.23) $$\frac{\omega^2}{\alpha\sigma} = \frac{h^2}{r^4 + h^2} \qquad \text{(h constante)}$$

Il en résulte que :

(IV.24) $\Delta^{1}_{44} = \frac{\sigma}{2\alpha} \cdot \partial_1 \log \sigma \left(\frac{r^4}{r^4 + h^2}\right)^2$; $\Delta^{4}_{14} = \frac{1}{2}\partial_1 \log \frac{\sigma r^4}{r^4 + h^2}$

IV.25) $\Delta \overset{1}{\underset{14}{\vee}} = \frac{c}{2} \cdot \partial_1 \log \left(\frac{r^4}{r^4+h^2} \right)$ *

En reportant ces valeurs dans l'intégrale (IV.13) nous obtenons :

IV.26) $J = 2 \int_C \left[\frac{c}{a} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^4+h^2}} \cdot (a^2-1) \left(\frac{c'}{c} + \frac{a'}{a} + \frac{2h^2}{r(r^4+h^2)} \right) - \frac{ch^2}{ar^3\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \left(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} + \frac{2r^3}{r^4+h^2} \right) \right] dt$

$+ 2 \int_C \left[\frac{-c}{a} \cdot \frac{h^4}{\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \frac{1}{r^4} + \frac{h}{r^2} \cdot (\partial_1 \Gamma_4 - \partial_4 \Gamma_1) \right] dx.dy.dz.dt$

en désignant par un accent les dérivées prises par rapport à x_1

Revenons aux variables r , θ , φ , t et donnons à chacune des variables des limites constantes. Nous sommes ramené à annuler la variation de l'intégrale simple :

IV.27) $2 \int \left[\frac{c}{a} \cdot \frac{r^3}{\sqrt{r^4+h^2}} \cdot (a^2-1) \left(\frac{c'}{c} + \frac{a'}{a} + \frac{2h^2}{r(r^4+h^2)} \right) - \frac{ch^2}{ar\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \left(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} + \frac{2r^3}{r^4+h^2} \right) \right] dr$

$+ 2 \int \left[\frac{-c}{a} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \frac{1}{r^2} + h \cdot (\partial_1 \Gamma_4 - \partial_4 \Gamma_1) \right] dr$

où a et c sont des fonctions de r, a' et c' leurs dérivées

Faisons le changement de variables

$a \cdot c = u \qquad \frac{c}{a} = v \qquad$ d'où $\qquad a^2 = \frac{u}{v}$.

Nous obtenons

V.28) $\delta \int \left\{ \frac{r^3}{\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \left(1 - \frac{v}{u}\right) \cdot \left(u' + \frac{2h^2 u}{r(r^4+h^2)} \right) + \frac{h^2}{r\sqrt{r^4+h^2}} \cdot \left(v' - \frac{2r^3 v}{r^4+h^2} - \frac{v}{r} \right) \right\} dr = 0$

en omettant le terme $h (\partial_1 \Gamma_4 - \partial_4 \Gamma_1)$ qui n'intervient pas dans le calcul.

L'équation d'Euler relative à v s'écrit, après quelques simplifications :

IV.29) $$u' + \frac{2h^2 u}{r(r^4 + h^2)} = o \ .$$

et cette équation s'intègre en donnant

IV.30) $$u^2 = \omega = \left(1 + \frac{h^2}{r^4}\right) V^2 \qquad (V^2 \text{ constante})$$

L'équation d'Euler relative à u devient si l'on tient compte de (IV.29).

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{v}{u} - 1\right)\cdot\frac{r^3}{(r^4 + h^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \frac{r^3}{(r^4 + h^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{v}{u}\right)\cdot\frac{2h^2}{r\,(r^4 + h^2)} = o$$

d'où l'on déduit que

$$\left(\frac{v}{u} - 1\right) = \frac{D}{r} \qquad (D \text{ constante})$$

et en posant

$$D = -\frac{2m}{V^2} \qquad (m \text{ constante})$$

nous obtenons

$$\omega = a^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m}{V^2 r}}$$

En remarquant que

$$\omega^2 = \omega \cdot \frac{h^2}{r^4 + h^2} = \frac{V^2 \cdot h^2}{r^4}$$

nous retrouvons la solution de A. Papapetrou . [40]

Dans le cas de la théorie de W.B. Bonnor il convient d'ajouter au lagrangien le terme $-p^2 f^{ij} \varphi_{ij}$ qui devient compte tenu de la valeur ω^2 donnée par (IV.23)

$$- p^2 f^{ij} \varphi_{ij} = \frac{2p^2 \cdot h^2 \cdot u}{(r^4 + h^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (u = a\,c)$$

L'équation d'Euler relative à v est donc la même que dans le cas précédent et l'égalité (IV.30) en résulte encore. L'équation d'Euler relative à u s'écrit compte tenu de (IV.29) :

$$\text{(IV.31)} \quad \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{r^3}{(r^4 + h^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{2r^3 h^2}{(r^4 + h^2)^{3/2}} \cdot \left(1 - \frac{v}{u}\right) + \frac{p^2 \cdot h^2}{(r^4 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Cette équation s'intègre en donnant :

$$\frac{v}{u} - 1 = p^2 \frac{h^2}{r^2} + \frac{M}{r} \qquad (M \text{ constante})$$

Nous en déduisons la solution :

$$\text{(IV.32)} \quad \boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1 - \frac{2m}{r V^2} + \frac{p^2 h^2}{r^2}} \quad ; \quad \beta = r^2 \\ \sigma &= \left(V^2 + p^2 \frac{h^2 V^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right) \cdot \left(1 + \frac{h^2}{r^4}\right) \quad ; \quad \omega = \frac{V \cdot h}{r^2} \end{aligned}}$$

qui rappelle la solution obtenue en Relativité Générale par Reissner et Nordström .

Nous avons étendu la méthode de l'hamiltonien à la théorie unitaire dans l'espoir d'obtenir des solutions à symétrie sphérique des équations de Bonnor. Dans l'hypothèse $g_{14} \equiv 0$ $q_{23} \not\equiv 0$ nous n'avons pas réussi à achever les calculs, tandis que dans le cas $g_{14} \not\equiv 0$ $g_{23} \equiv 0$, nous avons obtenu la solution (IV.32)

Cette méthode n'est pas très rigoureuse. Elle ne nous permet pas d'affirmer que la solution obtenue vérifie nécessairement les équations du champ, car les variations des g^{ij} ne sont pas arbitraires puisqu'elles dépendent seulement de deux fonctions de r. Une intégration directe de ces équations nous donnera cette assurance. [35]

d. <u>Intégration directe des équations de Bonnor</u> [41]

Avec les notations de Mme M.A. Tonnelat, les équations du problème s'écrivent,

$$(IV.33)\quad W_{11} = \frac{\omega^2 . \alpha}{\omega - \alpha.\sigma} \cdot p^2 \qquad W_{22} = \frac{W_{33}}{\sin^2\theta} = - \frac{\omega^2 r^2}{\omega^2 - \alpha\sigma} . p^2$$

$$(IV.34)\quad W_{44} = \frac{- \omega^2 . \sigma}{\omega^2 - \alpha.\sigma} \cdot p^2 \qquad \frac{\omega^2}{\alpha\sigma} = \frac{h^2}{h^2 + r^4}$$

L'expression $\left(W_{11} + \frac{\alpha}{\sigma} . W_{44}\right)$ est nulle d'après les équations $(IV.33_1$ et $(IV.34)_1$

Nous en déduisons que :

$$\alpha\sigma = \left(1 + \frac{h^2}{r^4} \right). V^2.$$

Nous trouvons grâce à cette relation que :

$$\omega^2 = \alpha\sigma . \frac{h^2}{h^2 + r^4} = \frac{h^2 V^2}{r^4}$$

Les équations du champ s'écrivent alors simplement

$$(IV.35)\quad W_{11} = \frac{-h^2}{r^4} . \alpha p^2 \quad ; \quad W_{22} = \frac{h^2 p^2}{r^2} \quad ; \quad W_{44} = \frac{h^2 . \sigma . p^2}{r^4}$$

et les équations $(IV.35)_1$ et $(IV.35_2)$ se réduisent à une seule, car nous avons les identités

$$\partial_1 W_{22} \equiv \frac{2r}{\alpha} \cdot W_{11} \qquad \partial_1 \left(\frac{h^2 p^2}{r^2}\right) \equiv - \frac{2r}{\alpha} \cdot \left(\frac{h^2 \alpha p^2}{r^4} \right)$$

L'intégration de l'équation $(IV.35)_2$ donne :

$$= \left(1 + \frac{h^2}{r^4} \right) \cdot \left(V^2 - \frac{2m}{r} + \frac{h^2 p^2 V^2}{r^2} \right)$$

et nous retrouvons la solution obtenue précédemment.

Pachner a obtenu indépendamment cette solution par une intégration directe [41]

e . Dans le cas non statique, nous avons identiquement

$$\underset{\vee}{W_{23}} \equiv o \qquad \underset{\vee}{U_{23}} \equiv o$$

et les équations du champ

$$\partial_2 \left(\underset{\vee}{W_{14}} + p^2 \underset{\vee}{U_{14}} \right) \equiv o \qquad \partial_3 \left(\underset{\vee}{W_{14}} + p^2 \underset{\vee}{U_{14}} \right) \equiv o$$

sont automatiquement vérifiées puisque $\underset{\vee}{W_{14}} + p^2 . \underset{\vee}{U_{14}}$ ne dépend que de r et de t .

Pour obtenir les équations du champ, il suffit donc d'ajouter au système des équations (IV.33) et (IV.34) l'équation

(IV.36) $$\underline{W_{14}} + p^2 \underline{U_{14}} = o$$

qui se réduit à $$\underline{W_{14}} = o$$

Cette équation est satisfaite si [39]

$$\dot{\alpha} = o \quad \text{ou si} \quad \frac{2}{r} = \frac{1}{2} \partial_1 \log U$$

la valeur de $U = \frac{r^4}{h^2 + r^4}$ n'est pas compatible avec cette dernière relation. Il faut donc que :

(IV.37) $\alpha = 0$

et <u>les équations du champ sont identiques dans le cas statique et dans le cas non statique</u> [36]

<u>Courant et charge en théorie de Bonnor</u> [38]

Choisissons comme tenseur métrique le tenseur γ_{ij} .
Les composantes du champ de l'induction électromagnétique sont respectivement :

$$pq \quad : \quad \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \cdot f^{pq}$$

si nous appliquons ce résultat à la solution (IV.32) des équations de Bonnor, nous trouvons en posant $V = 1$

(IV.38) $$\varphi_{14} = \frac{h}{r^2} \; ; \quad f^{14}\sqrt{\frac{g}{\gamma}} = -\frac{h}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^4}}}$$

Les expressions obtenues sont les mêmes que dans le cas de la solution de A. Papapetrou, car α , ω et β ont les mêmes valeurs dans les deux cas. Nous pouvons en déduire les mêmes conséquences.

Si nous définissons le courant j^h par :

$$4\pi \cdot \sqrt{-\gamma} \cdot j^h = \partial_p \left(\sqrt{-\gamma} \cdot \varphi^{\underline{h}\,\underline{p}} \right) \; ; \; \varphi^{\underline{hp}} = \varphi_{iq} \cdot \gamma^{ih} \cdot \gamma^{qp}$$

et si nous posons :

$$h\,b = e \qquad h = r_o^2 \qquad (h,\ e, r_o\ ,\ b \text{ constantes})$$

nous obtenons :

(IV.39) $$b\,j^4 = \frac{e}{2\pi r_o^2 \left(\frac{r}{r_o}\right)\left(1 + \frac{r^4}{r_o^4}\right)^{3/2} \cdot \left(1 + \frac{h^2}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad e = \int_o^{\infty}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi} b\,j^4 \cdot \sqrt{-\gamma}\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

II. LES EXTENSIONS DE LA THEORIE DE BONNOR

A. Les équations approchées

Nous allons chercher les équations approchées du dernier système d'équations du champ que nous avons obtenu dans le Chapitre II.

Les valeurs approchées des coefficients de la connexion seront calculées par la méthode des approximations successives en supposant que les f^{ij} sont petits devant l'unité et de l'ordre d'un paramètre ε . Nous ne ferons aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur du tenseur gravitationnel, nous supposerons seulement que ce tenseur diffère des tenseurs γ_{ij} et h_{ij}. par des termes ε^2. Les formules s'appliqueront à tous les tenseurs gravitationnels habituellement utilisés.

1. Les équations de liaison

Dans le Chapitre II nous avons formé des systèmes d'équations du champ qui contiennent les équations de liaison :

$$\partial_i \mathfrak{H}^{ij} = - f^j \cdot \sqrt{-g} \qquad \text{II.85)}_1$$

$$D_h \mathfrak{H}^{ij}_{+} = - \frac{2}{3} \cdot \delta^i_h \cdot f^j \cdot \sqrt{-g} \qquad \text{II.85)}_2$$

Si nous multiplions les deux membres de la dernière équation par g_{ij}, nous obtenons :

$$\frac{\partial_h \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} - L_{h\,i}^{\ i} = - \frac{1}{3} \cdot g_{hj} \cdot f^j \qquad (85)$$

Cette expression permet de donner à l'équation la forme suivante :

$$\partial_h g^{ij} + g^{pj} . L_{p\ h}^{\ i} + g^{ip} . L_{h\ p}^{\ j} = -\frac{2}{3} . \delta_h^i . f^j + \frac{1}{3} . g^{ij} . f^k . g_{hk}$$

Le changement de connexion [29] :

$$L_{jh}^{i} = \Delta_{jh}^{\ i} - \frac{1}{2} g_{jh} . (f^i + \bar{f}^i) - \frac{1}{6} . \delta_h^i . g_{jp} . f^p$$

IV.40)

$$+ \frac{1}{2} . \delta_h^i . g_{jp} . \bar{f}^p + \frac{1}{2} \delta_j^i . g_{hp} . (f^p - \bar{f}^p)$$

avec

$$\bar{f^p} = \lambda^{pq} . \varphi_{qr} . f^r$$

donne :

$$\partial_h g^{ij} + g^{pj} . \Delta_{ph}^{\ i} + g^{ip} . \Delta_{h\ p}^{\ j} = o .$$

Nous allons chercher des solutions approchées de ce système Pour $f^r = o$ les résultats obtenus s'appliquent à la théorie d'Einstein-Schrödinger.

2. Le tenseur gravitationnel l^{ij}

Pour exprimer la connexion linéaire en fonction des champs g^{ij} , nous allons résoudre le système

IV.41) $$\partial_r g^{pq} + g^{mq} . \Delta_{m\ r}^{\ p} + g^{pm} . \Delta_{r\ m}^{\ q} = o$$

par approximations successives.

Nous ne ferons aucune hypothèse sur les coefficients $\Delta_{i\ j}^{\ h}$ que nous allons exprimer à l'aide du tenseur l^{ij} défini par la relation

$$q^{\underline{ij}} + l^{ij} = h^{ij}$$

où $q^{\underline{ij}}$ désigne un tenseur symétrique arbitraire.

Les formules obtenues s'appliqueront aux différents choix du tenseur gravitationnel qui ont été proposés .

$$q^{ij}_{\vee} = f^{ij} = g^{ij}_{\vee} \qquad q^{ij} = q^{ij}_{\underline{\quad}} + q^{ij}_{\vee}$$

de façon que

$$q^{ij} + l^{ij} = g^{ij}$$

Les abaissements d'indices seront effectués à l'aide du tenseur l_{ij} associé à l^{ih} et défini par :

$$l_{ij} \cdot l^{ih} = \delta^{h}_{j}$$

Les indices ainsi abaissés seront soulignés.

Nous allons mettre les équations (IV.41) sous une forme équivalente qui permet de résoudre par approximations successives.

3. Un lemme

La dérivation des deux membres des équations précédentes donne :

$$\partial_r \, l_{jh} = -l_{jp} \cdot l_{hq} \cdot \partial_r \, l^{pq} \tag{IV.42}$$

Désignons par $\left\{ {i \atop j\ h} \right\}$ les symboles de Christoffel de seconde espèce formés avec le tenseur l_{jj}. Si nous multiplions les deux membres des équations (IV.42) par $l_{jp} \cdot l_{hq}$ et si nous formons la combinaison qui donne l'expression des symboles de Christoffel, nous obtenons :

(IV.43)

$$U^{i}_{j\ h} = \Delta^{i}_{j\ h} - \left\{ {i \atop jh} \right\} = \frac{1}{2} \left[l^{ip} \nabla_p q_{\underline{jh}} - \nabla_h q^{i}_{\underline{j}} - \nabla_j q^{\ i}_{\underline{h}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} - U^{i}_{ph} \cdot q^{p}_{\underline{j}} - U_{j}^{\ i}{}_{p} \cdot q_{\underline{h}}^{\ p} - U_{h}^{\ p}{}_{r} \cdot q^{ir} \cdot l_{jp} - U_{p}^{\ r}{}_{j} \cdot q^{pi} \cdot l_{ph} \\ \\ + l^{ip} \cdot U_{m}^{\ r}{}_{p} \cdot l_{rj} \cdot q^{m}_{\underline{h}} + l^{ip} \cdot q^{r}_{\underline{j}} \cdot l_{hm} \cdot U_{p}^{\ m}{}_{r} \end{array} \right]$$

où ∇_p désigne l'opérateur de dérivation covariante formé avec $\begin{Bmatrix} i \\ j\ h \end{Bmatrix}$.

4) Approximations successives .

Supposons que les q^{ij} soient petits devant l'unité, ainsi que leurs dérivées des différents ordres, et qu'ils admettent des développements limités suivant les puissances croissantes d'un paramètre ε. Dans les applications physiques, l'approximation du second ordre est suffisante.

Remarquons que si

$$\underline{q^{ij}} = f^{ip} \cdot f^{qj} \cdot h_{pq} \qquad l^{ij} = \chi^{ij}$$

et que si

$$\underline{q^{ij}} = h^{ij}\left(1 - \sqrt{\frac{h}{g}}\right) \qquad l^{ij} = h^{ij}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

Le tenseur f^{ij} étant supposé petit et du premier ordre en ε, nous obtenons les tenseurs gravitationnels que l'on choisit habituellement en supposant que $\underline{q^{ij}}$ est du second ordre en ε.

Nous supposons donc que :

$$\underline{q^{ij}} = \underline{q^{ij}} + o(\varepsilon^4) \tag{IV.44}$$

$$f^{ij} \equiv q^{ij} = \underset{1}{q^{ij}} + o(\varepsilon^4). \tag{IV.45}$$

La méthode des approximations successives donne :

$$\Delta_j{}^i{}_h = \begin{Bmatrix} i \\ j\ h \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\left[l^{ip} \cdot \nabla_p\, q_{\underline{jh}} - \nabla_h\, q^i{}_{\underline{j}} - \nabla_j\, q_{\underline{h}}{}^i \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f^p{}_{\underline{h}} \cdot \nabla_p\, f_{\underline{j}}{}^i + f_{\underline{j}}{}^p \cdot \nabla_p f^i{}_{\underline{h}} + f^{pi} \cdot (\nabla_j f_{\underline{hp}} + \nabla_h f_{\underline{jp}}) \right] + o(\varepsilon^3).$$

où les indices soulignés ont été abaissés à l'aide de γ_{ij}.

5. Expressions rigoureuses de $R_{ij}(L)$ et de $R_{ij}(\Delta)$.

La définition de $R_{ij}(L)$:

IV.47) $$R_{ij}(L) = \partial_h L_{ij}^{\ h} - \partial_j L_{ih}^{\ h} + L_{ij}^{\ h} . L_{hk}^{\ k} - L_{ip}^{\ h} . L_{hj}^{\ p}$$

et l'expression (IV.40) des $L_{ij}^{\ h}$ donne : (*)

IV.48) $$R_{ij}(L) = R_{ij}(\Delta) - \frac{1}{2\sqrt{-g}} . g_{ij} . \partial_h (f^h \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} . (f_i - \bar{f}_i)(f_j - \bar{f}_j)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\partial_i (f_j - \bar{f}_j) - \partial_j (f_i - \bar{f}_i) \right].$$

avec

$$f_i = \varphi_{ih} . \gamma^{hk} . \varphi_{kp} . f^p$$

et

IV.49) $$R_{ij}(\Delta) = \partial_h \Delta_{ij}^{\ h} - \partial_j \Delta_{\underline{ih}}^{\ h} + \Delta_{ij}^{\ h} . \Delta_{\underline{hp}}^{\ p} - \Delta_{ip}^{\ h} . \Delta_{.hj}^{\ p}.$$

Pour évaluer ce dernier tenseur nous posons :

$$\Delta_{ij}^{\ h} = \left\{ {h \atop i\ j} \right\} + V_{ij}^{\ h} \qquad ; \qquad V_{ij}^{\ h} = U_{ij}^{\ h} + \Delta_{\underbrace{ij}}^{\ h}$$

En portant ces expressions dans la relation (IV.49), nous obtenons :

IV.50) $$R_{ij}(\Delta) = G_{ij} + \partial_h V_{ij}^{\ h} - \partial_j U_{ih}^{\ h} + V_{ij}^{\ h} . U_{hp}^{\ p} - V_{ip}^{\ h} . V_{hj}^{\ p}$$

où G_{ij} est le tenseur de Ricci de la connexion $\left\{ {h \atop i\ j} \right\}$.

Explicitons les parties symétrique et antisymétrique de $R_{ij}(\Delta)$:

$$R_{\underline{ij}}(\Delta) = G_{ij} + \nabla_h U_{ij}^{\ h} - \frac{1}{2}(\nabla_j U_{ih}^{\ h} + \nabla_i U_{jh}^{\ h}) + U_{i\ j}^{\ h} \cdot U_{h\ p}^{\ p}$$

$$- U_{i\ p}^{\ h} \cdot U_{h\ j}^{\ p} - \Delta_{i\ p}^{\ h} \cdot \Delta_{h\ j}^{\ p}$$

$$R_{ij}(\Delta) = \nabla_h \Delta_{ij}^{\ h} - \frac{1}{2}(\nabla_j U_{ih}^{\ h} - \nabla_i U_{j\ h}^{\ h}) \cdot + \Delta_{i\ j}^{\ h} \cdot U_{h\ p}^{\ p}$$

$$- U_{i\ p}^{\ h} \cdot \Delta_{h\ j}^{\ p} - \Delta_{i\ p}^{\ h} \cdot U_{h\ j}^{\ p}$$

6 . Expression approchée de $R_{ij}(\Delta)$

Posons

$$q^{\underline{ij}} = r^{ij}$$

et comme précédemment soulignons les indices abaissés à l'aide du tenseur L_{ij} .

Les hypothèses faites sur q^{ij} et l'expression (IV.43) des $\Delta_{i\ j}^{\ h}$ donnent :

$$R_{\underline{ij}}(\Delta) = G_{ij} + \frac{1}{2}\left[\Box r_{\underline{ij}} - \nabla_h \nabla_j (r^h_{\ \underline{i}}) - \nabla_h \nabla_{\ i} (r_{\underline{j}}^{\ h})\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j (r_h^{\ h}) + E_{ij} + 0(\varepsilon^3)$$

$$R_{ij}(\Delta) = \frac{1}{2}\left[\Box f_{\underline{ij}} - \nabla_h \nabla_j f^h_{\ \underline{i}} - \nabla_h \nabla_{\ i} f_{\underline{j}}^{\ h}\right] + 0(\varepsilon^3)$$

avec $\Box = \nabla_i . \nabla^{\ i}$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}.(\nabla_p f^q_{\ \underline{i}}).(\nabla_q f_{\underline{j}}^{\ p}) + \frac{1}{2}(\nabla_p f_{\underline{q}\underline{i}}).(\nabla^p f^q_{\ \underline{j}}) - \frac{1}{4}(\nabla_i f_{\underline{pq}}).(\nabla_j f^{pq})$$

$$+\frac{1}{2}.(\nabla_p f^{qp})\left[\nabla_i f_{\underline{jp}} + \nabla_j f_{\underline{ip}}\right] + \frac{1}{4} \nabla_i \nabla_j (f^{pq} \cdot f_{\underline{pq}})$$

$$+\frac{1}{2}\cdot f^{pq}\cdot \nabla_q(\nabla_i f_{jp}) + \nabla_q(\nabla_j f_{ip}) \quad .$$

$$+\frac{1}{2} f^{p}{}_{i}\cdot \nabla_q(\nabla_p f_j{}^q) \quad + \frac{1}{2} f^{p}{}_{j}\cdot \nabla_q(\nabla_p f_i{}^q)$$

D'autre part, la relation (II. [illegible]) peut s'écrire

$$\nabla_j f^{ij} + f^{ij}\cdot(\nabla_j \operatorname{Log}\sqrt{\frac{g}{l}}) = f^i \quad (l = \det l_{ij})$$

et en omettant les termes du 3e ordre, nous aurons :

$$\nabla_j f^{ij} = f^i + O(\varepsilon^3)$$

Enfin, dans un espace de Riemann dont le tenseur métrique est l_{ij} et dont le tenseur de Riemann-Christoffel est défini par

$$-G^t{}_{ijh} = \partial_h \left\{ {t \atop i\,j} \right\} - \partial_j \left\{ {t \atop i\,h} \right\} + \left\{ {p \atop i\,j} \right\}\cdot \left\{ {t \atop p\,h} \right\} - \left\{ {p \atop i\,h} \right\}\cdot \left\{ {t \atop p\,j} \right\},$$

nous avons les identités de commutation :

$$(\nabla_p \nabla_j - \nabla_j \nabla_p) f_{hi} = -\left[G^t{}_{hpj}\cdot f_{ti} + G^t{}_{ipj}\cdot f_{ht}\right] \qquad \text{(IV.51)}$$

Il en résulte, si nous utilisons la relation (IV.51) et les identités classiques que vérifie le tenseur de Riemann-Christoffel, que:

$$(\Delta) = \Box f_{ij} + (\nabla_j f_i - \nabla_i f_j) - G^h{}_{tij}\cdot f_h{}^t - G^t{}_j f_{ti} - G^t{}_i\cdot f_{jt} + O(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_p f^q{}_i)\cdot(\nabla_q f_j{}^p) + \frac{1}{2}(\nabla_p f_{qi})(\nabla^p f^q{}_j) - \frac{1}{4}(\nabla_i f_{pq})\cdot(\nabla_j f^{pq})$$

$$+\frac{1}{2} f^q\cdot\left[\nabla_i f_{jq} + \nabla_j f_{iq}\right] + \frac{1}{4}\cdot\nabla_i\nabla_j (f^{pq}\cdot f_{pq})$$

$$+\frac{1}{2} f^{pq}\left[\nabla_q(\nabla_i f_{jp}) + \nabla_q(\nabla_j f_{ip})\right]$$

$$+\frac{1}{2} f^{p}{}_{i}\cdot \nabla_p f_j + \frac{1}{2} f^{p}{}_{j}\cdot \nabla_p f_i$$

$$+\frac{1}{2}\ f^{p}{}_{\underline{i}}\cdot\left[-f_{\underline{h}}{}^{q}\cdot G^{h}{}_{\underline{j}\ qp}+f_{\underline{j}}{}^{t}\cdot G_{tp}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\ f^{p}{}_{\underline{j}}\cdot\left[-f_{\underline{h}}{}^{q}\cdot G^{h}{}_{iqp}+f_{\underline{i}}{}^{t}\cdot G_{tp}\right].$$

7. Expression approchée de R_{ij} (L).

La relation (IV.48), les hypothèses faites sur q^{ij} et les expressions de $f^{\underline{i}}$ et de $f_{\underline{i}}^{=}$ montrent que :

$$(L)=\frac{1}{2}\left[\Box f_{\underline{ij}}+G^{h}{}_{tij}\cdot f_{\underline{h}}{}^{t}-G^{t}{}_{\underline{j}}\cdot f_{\underline{ti}}-G^{t}{}_{\underline{i}}\cdot f_{\underline{jt}}\right]+0\ (\varepsilon^{3})$$

$$(L)=G_{ij}+\frac{1}{2}\left[\Box r_{\underline{ij}}-\nabla_{h}\nabla_{j}(r^{h}_{\underline{i}})-\nabla_{h}\nabla_{i}(r^{h}{}_{\underline{j}})\right]+\frac{1}{2}\nabla_{i}\nabla_{j}(r_{\underline{h}}{}^{h})$$

$$+E_{ij}-\frac{1}{2}\cdot\gamma_{ij}\cdot\nabla_{h}(\varphi^{h}_{p}\cdot f^{p})-\frac{1}{2}\cdot f_{j}\cdot f_{i}+0\ (\varepsilon^{3}).$$

8. Equations approchées d'une extension de la théorie de Bonnor (II.85)

Nous conservons les hypothèses faites dans les paragraphes précédents, et en particulier nous utilisons le tenseur métrique 1_{ij} . Dans ces conditions, les équations approchées de la théorie proposée dans le Chapitre II (paragraphe C , b) s'écrivent au second ordre :

a) pour l'électromagnétisme

(IV-52) $$\nabla_{i}\varphi^{i}{}_{j}=\frac{3}{2}\cdot\rho\cdot\Gamma_{j}+0\ (\varepsilon^{3})$$

$$\frac{1}{2}\left[\Box\varphi_{ij}+G^{h}{}_{tij}\cdot\varphi_{h}{}^{t}-G_{tj}\cdot\varphi^{t}{}_{i}-G_{ti}\cdot\varphi_{j}{}^{t}\right]+\varphi_{ij}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot a^{2}-p^{2}\right]$$

$$-(\partial_{m}A_{n})\cdot\frac{\varepsilon^{pqmn}}{\sqrt{-g}}\cdot\left[\frac{1}{2}\varphi_{ij}\cdot\varphi_{pq}-\varphi_{pj}\cdot\varphi_{iq}-\gamma_{pj}\cdot\gamma_{iq}\right]+0(\varepsilon^{3})$$

$$=\frac{2}{3}\left[\partial_{i}(\Gamma_{j})-\partial_{j}(\Gamma_{i})\right]$$

$$(\varphi_{ij}=\partial_{i}\varphi_{j}-\partial_{j}\varphi_{i})$$

b) pour la gravitation

(IV.53)

$$G_{ij} + \frac{1}{2}\cdot\left[\Box\, r_{\underline{ij}} - \nabla_h \nabla_j (r^h{}_{\underline{i}}) - \nabla_h \nabla_i (r^h{}_{\underline{j}}) + \nabla_i \nabla_j (r^h{}_{\underline{h}})\right] + O(\varepsilon^4)$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\chi_{ij}\cdot\nabla_h(\rho\cdot\varphi^{\underline{hp}}\cdot\Gamma_p) - \frac{9}{8}\cdot\rho^2\cdot\Gamma_i\Gamma_j + \rho\cdot\left[-\Gamma_i\Gamma_j + \frac{1}{2}a^2\cdot\chi_{ij}\right] + E_{ij}$$

$$+ p^2\left[-\frac{1}{2}\varphi^{\underline{pq}}\cdot\varphi_{pq}\cdot 1_{ij} + 2\varphi^{\underline{q}}{}_i\cdot\varphi_{qj}\right]$$

$$-(\partial_m A_n)\cdot\frac{\varepsilon^{pqmn}}{\sqrt{-g}}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\chi_{ij}\cdot\varphi_{pq} - \chi_{pj}\cdot\varphi_{iq} - \varphi_{pj}\cdot\chi_{iq}\right] = 0 .$$

Les indices soulignés ont été élevés (ou abaissés) à l'aide du tenseur 1^{ij} (ou 1_{ij}) .

En négligeant les termes de la forme $\varphi_{ij}\cdot\varphi_{pq}$ qui sont du second ordre en ε , nous déduisons de l'équation (IV,52,2) que :

$$\partial_m A_n\cdot\frac{\varepsilon^{ijmn}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\left[\Box\,\varphi^{\underline{ij}} + G^h{}_t{}^{\underline{ij}}\cdot\varphi_h{}^{\underline{t}} + \varphi^{\underline{ij}}(\rho a^2 - 2p^2)\right]$$

$$-\frac{2}{3}\left[\nabla^{\underline{i}}\Gamma^{\underline{j}} - \nabla^{\underline{j}}\Gamma^{\underline{i}}\right] + O(\varepsilon^2)$$

où les indices soulignés sont élevés (ou abaissés) à l'aide du tenseur 1^{ij} (ou 1_{ij}) .

Si nous reportons cette expression dans l'équation (IV,53), nous obtenons :

$$G_{ij} + \frac{1}{2}\cdot\left[\Box\, r_{\underline{ij}} - \nabla_h\nabla_j\, r^h{}_{\underline{i}} - \nabla_h\nabla_i\, r^h{}_{\underline{j}} + \nabla_i\nabla_j r^h{}_{\underline{h}}\right] + O(\varepsilon^3)$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\chi_{ij}\cdot\nabla_h(\rho\cdot\varphi^{\underline{hp}}\cdot\Gamma_p) - \frac{9}{8}\rho^2\Gamma_i\Gamma_j + E_{ij}$$

$$+\rho\left(-\Gamma_i\Gamma_j + \frac{1}{2}a^2\chi_{ij}\right)$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\left[\Box\ \varphi^{\underline{pq}} + G^{h}{}_{t}{}^{\underline{pq}}\cdot\varphi_{h}{}^{\underline{t}} + \varphi^{\underline{pq}}\rho a^{2}\right] - \frac{2}{3}\left[\nabla^{\underline{p}}\Gamma^{\underline{q}}\cdot - \nabla^{\underline{q}}\Gamma^{\underline{p}}\cdot\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(\gamma_{pj}\cdot\varphi_{iq} + \varphi_{pj}\cdot\gamma_{iq} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\cdot\varphi_{pq}\right) = 0$$

Nous faisons ainsi apparaître un tenseur électromagnétique:

$$\frac{1}{2}\rho a^{2}\cdot\left(2\,\varphi_{j}{}^{\underline{q}}\cdot\varphi_{iq} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\cdot\varphi_{pq}\cdot\varphi^{\underline{pq}}\right)$$

dont le coefficient ρa^{2} est, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant : ~~le carré de $\frac{3\sqrt{}}{2\pi}$ ou à dessiner~~ la densité de matière ~~et ρ la densité de charge~~. Ce coefficient n'est donc pas satisfaisant. Un second tenseur de type électromagnétique:

$$-\frac{2}{3}\left[\nabla^{\underline{p}}\Gamma^{\underline{q}}\cdot - \nabla^{\underline{q}}\Gamma^{\underline{p}}\cdot\right]\left[\gamma_{pj}\cdot\varphi_{iq} + \varphi_{pj}\cdot\gamma_{iq} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\cdot\varphi_{pq}\right]$$

apparaît dans la précédente équation mais il ne peut convenir car le potentiel Γ_{p} serait proportionnel au vecteur courant.

Nous pouvons éviter ces difficultés en supposant que $(\partial_{m} A_{n})\cdot\frac{\varepsilon^{pqmn}}{\sqrt{-g}}$ est du second ordre en ε, ce qui est possible puisque le vecteur A_{n} est arbitraire.

Les équations approchées s'écrivent alors :

$$\frac{1}{2}\left(\Box\varphi_{ij} + G^{h}{}_{t\,ij}\cdot\varphi_{h}{}^{\underline{t}}\right) + \varphi_{ij}\cdot\left(\frac{1}{2}\rho a^{2} - p^{2}\right) + 0\,(\varepsilon^{2})$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[\partial_{i}\Gamma_{j}\cdot - \partial_{j}\Gamma_{i}\cdot\right] \qquad \text{(V.54)}$$

$$\nabla_{i}\varphi^{\underline{i}}{}_{j} = \frac{3}{2}\cdot p\cdot\Gamma_{j} + 0\,(\varepsilon^{3})$$

$$\varphi_{ij} = \partial_{i}\varphi_{j} - \partial_{j}\varphi_{i}$$

b) pour la gravitation :

$$G_{ij} + \frac{1}{2}\Big[\Box\, r_{ij} - \nabla_h \nabla_j\, r^h{}_{\underline{i}} - \nabla_h \nabla_i\, r^h{}_{\underline{j}} + \nabla_i \nabla_j\, r^h{}_{\underline{h}} \Big]$$

$$+ \frac{3}{4}\, l_{ij} \cdot \nabla_h (\rho \cdot \varphi^{\underline{hp}} \cdot \Gamma_p) - \frac{9}{8} \cdot \rho^2 \cdot \Gamma_i \cdot \Gamma_j + \rho \left(-\Gamma_i \cdot \Gamma_j + \frac{1}{2}\, a^2 \cdot \gamma_{ij}\right) \tag{IV.55}$$

$$+ \rho^2 \cdot \left(2 \cdot \varphi^{\underline{q}}{}_i \cdot \varphi_{qj} - \frac{1}{2}\, \varphi^{\underline{pq}} \cdot \varphi_{pq} \cdot l_{ij}\right) + 0\,(\varepsilon^3) = 0$$

$$\Gamma_i \cdot \Gamma_j \cdot l^{ij} = a^2 + 0\,(\varepsilon^2)$$

Remarque

Nous supposons que le vecteur Γ_i est proportionnel au vecteur vitesse unitaire u_i et comme la norme de Γ_i est a^2 par hypothèse, nous posons :

$$\Gamma_i = a \cdot u_i$$

L'équation (IV.54,2) permet alors de définir le vecteur courant :

$$\frac{3}{2} \cdot \rho \cdot a \cdot u_i$$

La densité de charge est donc :

$$\rho = \frac{3 \cdot \rho a}{2}$$

La densité de matière est le coefficient σ du terme en $u_i \cdot u_j$ dans l'équation (IV.55), c'est à dire:

$$\sigma = \rho \cdot a^2 \qquad \sigma \sim \varepsilon$$

Il en résulte que : $$a = \frac{3\sigma}{2\rho}$$

Le cas du champ électromagnétique pur correspond à $\sigma = 0$ et peut s'obtenir en prenant $\rho = 0$

Le cas de la matière non chargée correspond à $\mu = 0$ et ne peut pas être obtenu dans cette théorie, ce qui n'est pas surprenant puisqu'en relativité générale le schéma matière pure - champ électromagnétique ne peut pas être déduit d'un principe variationnel lorsque l'on considère le vecteur vitesse unitaire u_i comme une variable indépendante .

B. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Nous nous proposons d'appliquer la méthode du tenseur d'énergie à la théorie dont nous venons de trouver les équations approchées du champ.

Un résultat général établi dans le Chapitre III donne les identités de conservation de la théorie .
Si nous supposons que les dérivées des A_n sont du second ordre en ε et que le tenseur métrique est :

$$h^{ij} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \quad ,$$

il résulte encore du Chapitre III que les conditions de conservation du tenseur d'impulsion-énergie sont identiquement vérifiées lorsque les équations antisymétriques du champ sont satisfaites.

Les calculs approchés effectués dans les Chapitres précédents vont nous permettre d'établir que ce résultat est valable, au second ordre d'approximation, pour tout tenseur métrique qui diffère du tenseur h^{ij} par un terme en ε^2 .

La méthode du tenseur d'énergie n'est donc pas applicable à la théorie si les dérivées des A_n sont du second ordre en ε .

9. Identités de conservation.

Dans le paragraphe 5 du Chapitre III, nous avons établi les identités de conservation pour les théories que l'on déduit par un principe variationnel du lagrangien

$$H_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}$$

où H_{ij} est un tenseur qui ne dépend que des coefficients $\Gamma_i^h{}_j$ de la connexion linéaire et de leurs dérivées, tandis que $\mathcal{L}$ est une identité scalaire qui ne dépend que de g^{ij}.

Le lagrangien de la théorie que nous étudions est un cas particulier du lagrangien précédent qui correspond aux hypothèses :

$$H_{ij} = R_{ij} - \rho \Gamma_i \cdot \Gamma_j \quad ; \quad \mathcal{L} = \rho \cdot a^2 \cdot \sqrt{-g} - p^2 \cdot \varphi_{ij} \mathcal{G}^{ij}$$

Les multiplicateurs de Lagrange :

$$A_m \cdot \varepsilon^{mpij} \cdot \partial_p \varphi_{ij} \quad \text{ou} \quad Q^{ij}\left[\varphi_{ij} - (\partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i)\right]\sqrt{-g}$$

donnent des intégrales dont la dérivée de Lie est nulle et n'interviennent pas dans la formation des identités de conservation qui s'écrivent :

$$\partial_p \left[H^*_{iq} \cdot \mathcal{G}^{pq} + H^*_{qi} \cdot \mathcal{G}^{qp}\right] - \partial_i \left(H^*_{pq} \cdot \mathcal{G}^{pq}\right) + H^*_{pq} \cdot \partial_h \mathcal{G}^{pq} = 0$$

avec

$$H^*_{iq} = R_{iq} - \rho \cdot \left(\Gamma_i \cdot \Gamma_q - \frac{1}{2} \cdot a^2 \gamma_{iq}\right) + p^2 \cdot U_{iq} \cdot$$

10. Changement de métrique

Désignons par l'_{ij} le tenseur $h_{ij}\sqrt{\frac{g}{h}}$, par ∇'_i l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion riemannienne formée avec l'_{ij}, et par G'_{ij} le tenseur de Ricci de cette connexion.

Posons

$$t^{ij} = l^{ij} - h^{ij} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

D'après la définition de l^{ij} et les hypothèses (IV.45) faites sur l'ordre de grandeur des f^{ij}, le tenseur t^{ij} est du second ordre en ε .

La relation (IV.53) donne :

$$R_{\underline{ij}}(L) - G_{ij} = R_{\underline{ij}}(L) - G'_{ij} + \frac{1}{2}\left[\Box t_{ij} + \nabla_i \nabla_j t_{\underline{h}}{}^{h} \right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[\nabla_h \nabla_j t^{h}_{\underline{i}} + \nabla_h \nabla_i t^{h}_{\underline{j}} \right] + o(\varepsilon^3)$$

Les indices soulignés ont été abaissés à l'aide de l_{ij} et G_{ij}, ∇_i ont la même signification que dans le paragraphe 5 .

D'autre part le tenseur d'impulsion-énergie correspondant à la métrique l_{ij} a été défini par :

(III.30) $$T_{ij} = R_{\underline{ij}}(L) - G_{ij} - \frac{1}{2} \cdot l_{ij} \cdot \left[R_{\underline{pq}} \cdot (L) - G_{pq} \right] \cdot l^{pq}$$

Il en résulte que les tenseurs d'énergie T_{ij} et T'_{ij} relatifs aux métriques l_{ij} et l'_{ij} sont liés par la relation :

$$T_{ij} = T'_{ij} + \frac{1}{2}\left[\Box t_{\underline{ij}} - \nabla_h \nabla_j t^{h}_{\underline{i}} - \nabla_h \nabla_i t^{h}_{\underline{j}} + \nabla_i \nabla_j t^{h}_{\underline{h}} \right]$$

$$- \frac{1}{2}\left[\Box t_{\underline{h}}{}^{h} - \nabla_h \nabla_p t^{hp} \right] \cdot \left[l_{ij} \right] + o(\varepsilon^3)$$

Nous en déduisons que :

$$\nabla_i (T_{pj} \cdot l^{pi}) = \nabla'_i (T'_{pj} \cdot l'^{pi}) + \frac{1}{2}\left[\nabla_h (\Box t^{h}_{\underline{j}}) - \nabla_i \nabla_h \nabla^i t^{h}_{\underline{j}} \right]$$

$$+ o(\varepsilon^3) + \frac{1}{2}\left[\nabla_j \nabla_h \nabla_p t^{hp} - \nabla_i \nabla_h \nabla_j t^{h}_{\underline{i}} + \Box \nabla_j t^{h}_{\underline{h}} - \nabla_j \Box t_{\underline{h}}{}^{h} \right]$$

Nous avons prouvé dans le Chapitre III que, pour une solution des équations de liaison, la relation

IV.55') $$\nabla'_i \ (T'_{pj} \cdot l'^{pi}) = o$$

est vérifiée sous la seule condition que les équations antisymétriques soient satisfaites. D'autre part, au second ordre d'approximation, les expressions de R_{ij} (L) qui correspondent aux métriques l_{ij} et l'_{ij} sont formellement identiques.

Calculons les dérivées absolues qui figurent dans le second membre de la relation précédente en utilisant les relations de commutation des dérivées covariantes :

$$\nabla_i \nabla_j t^p_{\underline{q}} - \nabla_j \nabla_i t^p_{\underline{q}} \equiv G^p_{hij} \cdot t^h_{\underline{q}} - G^h_{q\,ij} \cdot t^p_{\underline{h}}$$

En posant $\nabla^i = l^{ip} \nabla_p$, nous obtenons :

$$\nabla_h \Box t^h_{\underline{j}} - \nabla_i \nabla_h \nabla^i t^h_{\underline{j}} - (\nabla^i t^h_{\underline{j}}) \cdot G_{hi} - (\nabla^p t^h_{\underline{j}}) \cdot G_{ph}$$

$$+ (\nabla^i t^h_{\underline{p}}) \cdot G^p_{jih}$$

$$\nabla_j \nabla_h \nabla_p t^{hp} - \nabla_i \nabla_h \nabla_j t^{hi} \equiv -(\nabla_i G^i_{phj}) \cdot t^{hp} - G^i_{phj} \cdot (\nabla_i t^{hp})$$

$$- (\nabla_p t^{ip}) \cdot G_{ij} - \nabla_i (t^{pi} \cdot G_{pj})$$

$$\nabla_i \nabla^i \nabla_j t^h_{\underline{h}} - \nabla_j \Box t^h_{\underline{h}} \equiv G_{pj} \cdot (\nabla^p t^h_{\underline{h}})$$

D'autre part les identités de Bianchi :

$$\nabla_q G^i_{phj} + \nabla_j G^i_{pqh} + \nabla_h G^i_{pjq} \equiv o$$

donnent lorsque l'on contracte les indices i et q :

(IV.57) $$\nabla_i G^i{}_{phj} \equiv \nabla_j G_{ph} - \nabla_h G_{pj}$$

Supposons que les G_{ij} soient du premier ordre en ε.

L'identité précédente prouve que $\nabla_i G^i{}_{phj}$ est aussi du premier ordre. Les termes qui contiennent G_{ij} ou ses dérivées et qui figurent dans les seconds membres des identités (IV.56) sont du troisième ordre, puisque les $t_i{}^j$ sont du second ordre en .

Ajoutons membre à membre ces identités, nous obtenons :

$$\nabla_i(T_{pj}\cdot 1^{pi}) - \nabla'_i (T'_{pj}\cdot 1'^{pi}) = -\frac{1}{2}(\nabla_i t^{hp})\cdot G^i{}_{phj} + \frac{1}{2}(\nabla^i t^h{}_p)\cdot G^p{}_{jih}$$

(IV.58) $$= 0 + 0(\varepsilon^3)$$

en tenant compte de (IV.57) et en utilisant les propriétés de symétrie de $G^p{}_{jih}$.

Des relations (IV.55') (IV.58) et du résultat du Chapitre III que nous venons de rappeler, il résulte que :

Pour tout tenseur métrique 1_{ij} qui diffère de H_{ij} par des termes du second ordre, les conditions de conservation du tenseur d'impulsion-énergie défini par (III.30') sont vérifiées au second ordre d'approximation, pour une solution des équations de liaison, pourvu que les équations antisymétriques soient satisfaites, et que les composantes G_{ij} tenseur de Ricci de la connexion riemannienne définie par 1_{ij} soient au moins du premier ordre.* [30]

---

[30] cf. Mme M.A. Tonnelat. Contribution au Colloque de Royaumont 1959

Ce résultat s'applique en particulier aux tenseurs métriques h_{ij}, γ_{ij}, h_{ij}, $\sqrt{\frac{g}{h}}$ et $\frac{g}{2\gamma + 2\sigma - g} \cdot (2\gamma_{ij} - h_{ij})$

11. Equations du mouvement

a) Le résultat précédent s'explique et se généralise si l'on adopte le tenseur métrique a_{ij} défini par J. Hély et Pham Tan Hoang :

$$a^{ij} = h^{ij} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \qquad a_{ij} \cdot a^{ih} = \delta^h_j$$

Nous avons établi au Chapitre (III, paragraphe 5) que le tenseur d'impulsion-énergie T_{pq} défini par :

$$(IV.59) \quad T_{pq} \equiv H^*_{pq} - \frac{1}{2} a_{pq} \cdot H^*_{ij} \cdot a^{ij} \equiv G_{pq} - \frac{1}{2} a_{pq} a^{ij} \cdot G_{ij} - T_{pq}$$

avec:

$$H^*_{pq} = H_{pq} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{pq}} ,$$

vérifie les identités :

$$\overset{a}{\nabla}_q K^q_p \equiv \overset{a}{\nabla}_q (S^q_p - \chi T^q_p) \qquad) \equiv \frac{-1}{\sqrt{-a}} H_{p\underset{\vee}{i}} \cdot \partial_j \mathcal{G}^{\underset{\vee}{ji}}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot g^{\underset{\vee}{rq}} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot (\partial_p H^*_{\underset{\vee}{rq}} + \partial_r H^*_{\underset{\vee}{qp}} + \partial_q H^*_{\underset{\vee}{pr}})$$

pour toute solution $(g^{ij}, \Gamma^h_{ij}, \rho, A_i \ldots)$ des équations d'Euler relatives aux variables $(\Gamma^r_{pq}, \rho, A_i \ldots)$. $\overset{a}{\nabla}_q$ désigne l'opérateur de dérivation covariante associé à a_{ij} et les indices soulignés ont été élevés à l'aide de a^{ij}

Si les équations antisymétriques du champ sont vérifiées:

$$H^{*}_{p\,q} = 0$$

Nous avons les identités :

IV.60) $$\overset{a}{\nabla}_q K^{q}_{\ r} \equiv 0$$

et les équations symétriques du champ n'interviennent pas.

Ce résultat confirme celui qui a été obtenu au paragraphe précédent et généralise un résultat de la théorie d'Einstein-Schrödinger

b) Si en Relativité Générale, on considère un corps A caractérisé par un tenseur d'impulsion-énergie T_{ij} , les équations du champ :

IV-61) $$R_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij} \cdot R = \chi\, T_{ij}$$

ont pour conséquence les équations de conservation :

IV.62) $$\nabla_i\, T^{i}_{\ j} = 0$$

La méthode du tenseur d'impulsion-énergie consiste à prendre comme équations du mouvement du corps A , les équations :

IV.63) $$\int_A (\nabla_i\, T^{i}_{\ p}) \sqrt{-g} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0 \quad (P = 1,2,3)$$

On détermine ensuite une solution g_{ij} des équations du champ (IV.61) et l'on reporte cette solution dans les équations du mouvement.

c) Si, dans la théorie unitaire asymétrique, on définit les équations du mouvement d'un corps A par :

IV.64) $$\int_A (\nabla_i T^i_{\ p}) \sqrt{-a} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0 \qquad (P = 1,2,3)$$

il résulte du paragraphe a) que ces équations sont identiquement vérifiées lorsque l'équation antisymétrique du champ :

$$H^{*}_{\underbrace{p\ q}} = 0$$

est satisfaite. L'équation symétrique du champ n'intervient pas.

Ainsi toute théorie unitaire asymétrique dont les équations du champ s'obtiennent en appliquant un principe variationnel au lagrangien :

$$\mathcal{G}^{ij} \cdot H_{ij}(\Gamma^{\ r}_{p\ q}, \partial_s \Gamma^{\ r}_{p\ q}, \rho, A_i, ..) + \mathcal{L}(\mathcal{G}^{ij}, \rho, A_i, ..)$$

conduit par la méthode du tenseur d'énergie, lorsque le tenseur gravitationnel est $h_{ij} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$, et compte tenu des équations d'Euler relatives aux variables $\Gamma^{\ h}_{i\ j}$, ρ, A_i ... , à des équations du mouvement qui sont identiquement vérifiées sous la seule condition que les équations antisymétriques du champ soient satisfaites.

12. Conclusions

Notre généralisation de la théorie unitaire asymétrique ne peut donc conduire aux équations du mouvement d'une particule chargée lorsque l'on utilise la méthode du tenseur d'énergie, si l'on ne renonce pas au principe variationnel.

L'abandon de ce principe a permis à Mme M.A. Tonnelat de donner une solution satisfaisante au problème des équations du mouvement sans utiliser de termes phénoménologiques et sans sortir du cadre géométrique de la théorie d'Einstein-Schrödinger. 30

Notre travail permet de donner un caractère unitaire à la théorie de Bonnor. Les équations du champ de cette théorie sont compatibles et admettent une solution statique à symétrie sphérique intéressante dans le cas où :

$$g_{\underbrace{14}} \neq 0 \qquad g_{\underbrace{23}} = 0$$

Mais l'étude des solutions à symétrie sphérique dans l'hypothèse contraire ($g_{14} \equiv 0$, $g_{23} \equiv 0$) qui, d'après Bonnor , pourrait conduire à des solutions partout régulières pose un problème qui reste à résoudre .

C H A P I T R E V

ESPACES - TEMPS STATIQUES

Einstein pensait qu'il doit être possible de représenter la matière par des solutions non singulières des équations du champ et que ces solutions permettaient d'obtenir les équations du mouvement des particules chargées.

Bien que cette idée soit contestée par certains auteurs [24] , nous avons étudié l'existence de solutions non singulières des équations du champ de la théorie d'Einstein-Schrödinger.

En supposant que le tenseur fondamental soit indépendant de la variable temporelle x^4 et que ses composantes g_{4i} et g_{i4} soient nulles, nous avons tenté d'étendre à la théorie non-symétrique le théorème de régularité établi en Relativité Générale par MM. Racine et Lichnerowicz : "Un espace-temps extérieur statique et orthogonal dont les sections d'espace sont des compacts , ou qui admet un comportement asymptotique euclidien dans son domaine à l'infini ne peut être partout régulier sans se réduire localement à l'espace temps euclidien [50] [51]

Il ne semble pas possible d'étendre cette conclusion à la théorie unitaire et ce résultat négatif n'exclut pas l'existence de solutions partout régulières mais il ne permet pas de l'affirmer.

D'autre part, l'étude des espaces-temps statiques nous a conduit à une généralisation du théorème de Gauss, mais la théorie unitaire ne permet pas de tirer de ce résultat des conséquences sur les singularités du champ.

I) REGULARITE D'UN ESPACE TEMPS MUNI D'UN TENSEUR FONDAMENTAL ET D'UNE CONNEXION AFFINE NON SYMETRIQUE [50]

Un espace-temps V_n, c'est à dire une variété à quatre dimensions douée d'une structure de variété différentielle de classe C^2, C^4 par morceaux, est régulier dans un domaine D lorsqu'il possède dans ce domaine les propriétés suivantes :

(Les indices A , B .. prennent les valeurs 1,2,3)
(Les indices i , j .. prennent les valeurs 1,2,3,4)

1º) Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental sont des fonctions de classes C^2 .

2º) Le déterminant g des g_{ij} est différent de zéro.

3º) La forme quadratique $g_{ij}\ X^i . X^j$ est une forme de type hyperbolique caractérisé par un carré positif et trois carrés négatifs . Il en résulte que :

$$\det g_{ij} < 0$$

Si nous posons :

$$\Phi(X) = \gamma_{ij} . X^i . X^j \qquad (\gamma_{ij} = g_{\underline{ij}})$$

$$Y_i = g_{ji} . X^j \qquad X^j = g^{ji} . Y_i$$

nous obtenons:

$$\Psi(Y) = h^{ij} . X_i . X_j = \gamma_{ij} . X^i . X^j \quad (h^{ij} = g^{\underline{ij}})$$

La forme $g^{ij} . Y_i . Y_j$ est donc aussi non dégénérée, de type hyperbolique normal caractérisé par la signature (+, -,-,-) Il en résulte que le déterminant h des $g^{\underline{ij}}$ est négatif .

4º) L'espace-temps est rapporté à des lignes de temps et à des sections d'espace. Nous supposons que la variable temporelle est X^4, que g_{44} et g^{44} sont positives et ne peuvent s'an-

nuler en aucun point du domaine D . Il en résulte que :

$$h^{AB} X_A X_B \quad , \quad h_{AB} X^A X^B \quad , \quad \gamma_{AB} X^A X^B \quad , \quad \gamma^{AB} X_A X_B$$

sont des formes définies négatives dans ce domaine .

5º) Il existe sur V_4 une connexion linéaire dont les coefficients Γ^h_{ij} sont de classe C^2 .
Lorsque la variable X^4 varie entre deux valeurs quelconques a et b , la variété $X^4 = cte$ balaye une région (R).

Nous dirons qu'un espace-temps est partout régulier dans l'espace lorsque l'on peut trouver un système de coordonnées (X^i) et une région (R) correspondante tels que l'espace-temps, rapporté au système de coordonnées (X^i) soit régulier dans tout domaine D appartenant à (R).

6º) Nous supposerons que le tenseur fondamental et la connexion sont liés par les équations d'Einstein et que ces équations admettent une solution. Il en résulte que les Γ^h_{ij} sont des fonctions continues.

2. VARIETE RIEMANNIENNE COMPLETE [12]

Considérons une variété riemannienne W_n à métrique définie positive.

On appelle distance de deux points X_1 et X_2 de W_n, la borne inférieure $d(X_1, X_2)$ des longueurs des chemins continûment différentiables qui joignent X_1 à X_2 .

Une suite de points x_p $(p = 1, 2, \ldots)$ de W_n est dite une suite de Cauchy, pour la structure métrique définie par $d(X_1, X_2)$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier P tel que les inégalités :

$$p, q > P \qquad \text{entraînent} \qquad d(X_1, X_2) < \varepsilon$$

La variété riemannienne W_n est dite complète si toute suite de Cauchy de W_n est convergente , c'est à dire s'il existe un point X de W_n tel que $d(x , x_p)$ tende vers 0 lorsque p tend vers l'infini.

Les variétés riemanniennes complètes peuvent être partagées en deux classes :

1º) si l'ensemble des distances $d(a , x)$ des points X de V_n à un point fixe a est borné, la variété riemannienne complète est un espace compact;

2º) si l'ensemble des distances $d(a, x)$ n'est pas borné, on dit que la variété W_n admet un domaine à l'infini.

3. THEOREME DE E. HOPF - CONSEQUENCES [12]

a) Considérons dans l'espace euclidien à n dimensions, un ouvert U borné, et sur cet ouvert un opérateur de type elliptique.

V.1) $$A(V) = - \gamma^{ij} . \partial_i \partial_j V + h^i \partial_i V . \quad (i,j = 1,2 \ldots n)$$

où γ^{ij} et h^i sont des fonctions continues sur U et où la forme quadratique $- \partial_{ij} . X^i . X^j$ est définie positive.

Nous admettrons le théorème Hopf qui peut s'énoncer : Si V est une fonction de classe C^2 sur U telle que $A(V) \geqslant 0$ et s'il existe un point a intérieur à U tel que pour tout $x \in U$ on ait $V(x) \leqslant V(a)$, cette fonction V est constante dans U .

b) Considérons une variété riemannienne complète V_n, dont la métrique est définie positive, et sur un domaine D de coordonnées locales de V_n l'opérateur

$$L(V) = \Delta V + h^i . \partial_i V .$$

où ΔV est le laplacien de la fonction V, de classe C^2 et où h^i sont les composantes continues d'un vecteur .

Du théorème de Hopf, on déduit que :

Si une fonction V bornée de classe C^2 sur une variété riemannienne complète V_n est telle que L(V) soit positif ou nul, et si cette fonction V atteint son maximum en un point de V_n, elle est constante sur V_n.

c) Considérons sur une variété riemannienne complète V_n qui admet un domaine à l'infini, une fonction V, de classe C^2, telle que

$$L(V) = \Delta V + h^i \cdot \partial_i V = 0.$$

On dit que U tend uniformément vers une constante k, dans le domaine à l'infini de V_n si, a étant un point déterminé de V_n, on peut associer à tout ε positif un nombre R positif ne dépendant que de ε, tel que :

$$d(a, x) \geqslant R$$

entraîne

$$|V(x) - k| < \varepsilon$$

Cette définition permet de démontrer le théorème suivant .

Si une fonction V de classe C^2 sur une variété riemannienne complète est telle que

$$L(V) = 0$$

et si cette fonction V tend uniformément vers une constante k dans le domaine à l'infini de V_n, elle est constante sur V_n.

4. Espaces-temps statiques pseudo-orthogonaux [50] [49] .

a) Considérons un espace-temps rapporté, dans un domaine où il est régulier, à des sections d'espace et à des lignes de temps telles que le tenseur fondamental vérifie les conditions :

(V.3)
$$g_{B4} = g_{4B} = 0$$

Nous dirons qu'un tel espace-temps est pseudo-orthogonal .

Les relations :

$$g^{il} \cdot g_{ij} = \delta^l_j$$

montrent que les hypothèses (V.3) sont équivalentes à :

$$g^{B4} = g^{4B} = 0$$

et qu'elles ont pour conséquence les égalités :

$$g^{44} \cdot g_{44} = 1 \qquad g^{AB} \cdot g_{AC} = \delta^{B}_{C}$$

b) Nous supposons en outre que l'espace-temps est statique, c'est à dire que les g_{ij} sont indépendants de la variable temporelle x^4

Les équations d'Einstein qui définissent la connexion L^{h}_{ij} s'écrivent alors :

(V.4) $$o = \partial_4 g_{44} = 2\, g_{44} \cdot L^{4}_{44}$$

(V.5) $$\partial_B g_{44} = 2\, g_{44} \cdot L^{4}_{\underline{B4}}$$

(V.6) $$o = \partial_4 g_{4B} = g_{44} \cdot L^{4}_{4B} + g_{cB} \cdot L^{c}_{44}$$

(V.7) $$o = \partial_4 g_{B4} = g_{44} \cdot L^{4}_{B4} + g_{Bc} \cdot L^{c}_{44}$$

(V.8) $$o = \partial_A g_{B4} = g_{Bc} \cdot L^{c}_{A4} + g_{44} \cdot L^{4}_{BA}$$

(V.9) $$o = \partial_A g_{4B} = g_{cB} \cdot L^{c}_{4A} + g_{44} \cdot L^{4}_{AB}$$

(V.10) $$o = \partial_4 g_{AB} = g_{Ac} \cdot L^{c}_{4B} + g_{cB} \cdot L^{c}_{A4}$$

De (V.4) (V.5) (V.6) (V.7) nous déduisons que :

(V.11) $$L^{4}_{4\,4} = 0 \qquad ; \qquad L^{4}_{A\,4} = \frac{1}{2} (\partial_A g_{44}) . g^{44} \qquad (V.12)$$

(V.13) $L_{4\ 4}^{\ B} = -\frac{1}{2}(\partial_A g_{44})\chi^{AB}$; $L_{4\ B}^{\ 4} = \frac{1}{2}(\partial_C g_{A4})\chi^{CA}\cdot\varphi_{AB}\cdot g^{44}$ (V.14)

où ^{Ac} est le tenseur associé à $\chi_{AB} = g_{AB}$ et où

$$\varphi_{AB} = g_{AB}$$

Les valeurs de $L_{4\ A}^{\ C}$ et de $L_{A\ 4}^{\ C}$ tirées de (V.8) et de (V.9)

(V.15) $L_{4\ B}^{\ A} = -g_{44}\cdot L_{C\ B}^{\ A}\cdot g^{CA}$, $L_{B\ 4}^{\ A} = -g_{44}\cdot L_{C\ B}^{\ 4}\cdot g^{CA}$ (V.16)

donnent lorsqu'on les reporte dans l'équation (V.10)

(V.17) $g_{AC}\cdot g^{CD}\cdot L_{B\ D}^{\ 4} + g_{CB}\cdot g^{DC}\cdot L_{D\ A}^{\ 4} = 0$

Si le déterminant des coefficients des $L_{A\ B}^{\ 4}$ est différent de zéro, l'équation (V.17) n'admet que la solution

$$L_{A\ B}^{\ 4} = 0$$

Il en résulte, d'après (V.15) et (V.16) que

$$L_{4\ B}^{\ A} = 0 \quad , \quad L_{B\ 4}^{\ A} = 0$$

Ainsi les coefficients de la connexion qui ne contiennent qu'un seul indice égal à 4 sont nuls.

c) Ce résultat permet d'écrire la composante W_{44} du tenseur de Ricci associé à la connexion L

$$W_{44} = {}_A L_{4\ 4}^{\ A} + L_{4\ 4}^{\ A}\left(L_{A\ h}^{\ h} - 2L_{4\ A}^{\ h}\right)$$

Puisque le vecteur de torsion $L_{i\ h}^{\ h}$ de la connexion $L_{i\ j}^{\ h}$ est nul, nous obtenons :

(V.18) $W_{44} = \partial_A L_{4\ 4}^{\ A} + L_{4\ 4}^{\ A}\left(L_{A\ H}^{\ H} - L_{4\ A}^{\ 4}\right)$

Reportons dans l'équation (V.18) les valeurs de $L^{A}_{\underline{4\,4}}$ et de $L^{4}_{\underline{4\,A}}$ tirées de (V.11) et de (V.12). Nous obtenons :

$$(V.19)\quad W_{44} = -\frac{1}{2}\cdot\partial_A\left[(\partial_B g_{44})\cdot\gamma^{AB}\right] - \frac{1}{2}(\partial_B g_{44})\,\gamma^{AB}\cdot L^{H}_{\underline{A\,H}}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot(\partial_A g_{44})\cdot(\partial_B g_{44})\cdot\gamma^{AB}\cdot g^{44}$$

Si ∇_{oH} est l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion $L^{C}_{\underline{AB}}$ et si nous définissons l'opérateur $\overset{o}{\Delta}_2$ par :

$$(V.20)\qquad \overset{o}{\Delta}_2 = \gamma^{AB}\cdot\nabla_{oA}\left(\nabla_{oB}\right)$$

nous obtenons :

$$(V.21)\quad W_{44} = -\sqrt{g_{44}}\left[\left(\nabla_{oA}\gamma^{AB}\right).\partial_B\sqrt{g_{44}} + \overset{o}{\Delta}_2\sqrt{g_{44}}\right]$$

Supposons que la section d'espace W_3 définie par :

$$x^4 = 0$$

soit munie d'une structure de variété riemannienne déterminée par la métrique $\gamma_{AB}\cdot x^A\cdot x^B$ qui d'après nos hypothèses du paragraphe (1,4) est définie négative.

Supposons que W_3 soit une variété complète.

1) Si W_3 est compacte, le théorème du paragraphe (III,b) montre que g^{44} est constante sur W_3.

2) Si W_3 admet un domaine à l'infini, nous supposons que g^{44} tend uniformément dans ce domaine vers une constante non nulle. Le théorème (III,c) montre que g^{44} est constant sur W_3.

Dans les deux cas considérés g^{44} est donc constant sur W_3

et d'après les formules (V.12),(V.13),(V.14), nous avons :

$$L^{4}_{\underline{4A}} = o \qquad L^{4}_{\underset{\smile}{4A}} = o \qquad L^{A}_{44} = o$$

Tous les coefficients de la connexion qui contiennent un indice sont nuls.

Les équations du champ se réduisent par conséquent à

$$\partial_A \mathcal{G}^{A}_{\underset{\smile}{B}} = o \qquad D_H \mathcal{G}^{A}_{\underline{+}\,\underline{B}} = o$$

$$R_{AB}(L) = \frac{2}{3}\left(\partial_A \Gamma_B - \partial_B \Gamma_A\right)$$

Dans l'espace de Riemann à quatre dimensions de la Relativité Générale, la nullité du tenseur de Ricci des sections d'espace entraîne celle du tenseur de courbure et permet d'affirmer que l'espace est localement euclidien. Nous avons tenté vainement d'obtenir cette conclusion dans le cas actuel* , en supposant que l'espace-temps admet un comportement asymptotique euclidien, c'est à dire en supposant qu'il existe un système de coordonnées (x) régulier dans le domaine à l'infini et tel que les potentiels g_{ij} tendent uniformément vers η_{ij} lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur les sections d'espace

$$\eta_{ij} = o \text{ si } i \neq j \,, \quad \eta_{ij} = -1 \text{ si } i = j = A \,; \quad \eta_{44} = +1$$

La difficulté que nous venons de rencontrer nous empêche de généraliser le théorème de M. M. Racine et Lichnerowicz. Ce résultat négatif laisse subsister la possibilité de l'existence de solutions partout régulières dans le cas statique, pseudo-orthogonal, mais bien entendu, il ne permet pas de l'affirmer.

---

* L'exemple suivant $g_{\underline{ij}} = \eta_{ij} \qquad g_{\underset{\smile}{ij}} = \text{cte}$
montre que les tenseurs de Ricci et de Riemann-Christoffel peuvent être nuls sans que l'espace soit localement euclidien.

B. Théorème de Gauss. [49] [50]

Nous allons généraliser un théorème de M. A. Lichnérowicz relatif aux espaces riemanniens dont le ds^2 est statique et l'étendre aux espaces à connexion linéaire munis d'un tenseur fondamental statique et asymétrique.

a) Les relations de commutation

Définissons le transposé $\tilde{\Gamma}^{h}_{ij}$ du coefficient Γ^{h}_{ij} de la connexion linéaire par la relation :

$$\tilde{\Gamma}^{h}_{ij} = \Gamma^{h}_{ji}$$

et le transposé du tenseur de courbure;

$$R^{i}_{j,hk} \equiv \partial_h \Gamma^{i}_{jk} - \partial_k \Gamma^{i}_{jh} + \Gamma^{t}_{jk} \cdot \Gamma^{i}_{th} - \Gamma^{t}_{jh} \cdot \Gamma^{i}_{tk} ,$$

2) par :

$$\tilde{R}^{i}_{j,hk} \equiv \partial_h \Gamma^{i}_{kj} - \partial_k \Gamma^{i}_{hj} + \Gamma^{t}_{kj} \cdot \Gamma^{i}_{ht} - \Gamma^{t}_{hj} \cdot \Gamma^{i}_{kt}$$

Convenons de placer les signes + ou - sous les indices qui subissent une dérivation covariante polarisée et de ne pas faire subir de dérivation aux indices qui ne sont pas affectés de ces signes. Nous obtenons pour un vecteur v^h arbitraire :

$$\left[(v \overset{h}{+}); _i \right] ;_j = \partial_j (\partial_i v^h + v^t \cdot \Gamma^{h}_{ti}) + (\partial_i v + v^t \Gamma^{k}_{ti}) \cdot \Gamma^{h}_{kj}$$

$$\left[(v \overset{h}{+}); _j \right] ;_i = \partial_i (\partial_j v^h + v^t \cdot \Gamma^{h}_{tj}) + (\partial_j v + v^t \Gamma^{k}_{tj}) \cdot \Gamma^{h}_{ki}$$

d'où l'identité :

3) $$\left[(v \overset{h}{+}); _i \right] ;_j - \left[(v \overset{h}{+}); _j \right] ;_i \equiv v^k \cdot R^{h}_{k} , i\ j$$

On obtient de la même façon l'identité :

4) $$\left[(v \overset{h}{-}); _i \right] ;_j - \left[(v \overset{h}{-}); _j \right] ;_i \equiv v^k \cdot R^{h}_{k} , i\ j$$

b) Une identité

(V.25) Posons: $v^i = g^{i4}$; $w^i = g^{4i}$

et supposons que le tenseur fondamental de la variété soit lié à la connexion linéaire $L_{i\ j}^{\ h}$, dont le vecteur de torsion est nul, par la relation :

(V.26) $$\partial_i g^{jh} + g^{kh} \cdot L_{k\ i}^{\ j} + g^{jk} \cdot L_{i\ k}^{\ h} + A^{jh}_{\ \ i} = 0$$

où $A^{jh}_{\ \ i}$ désigne un tenseur arbitraire .

Appliquons les identités (V.23) et (V.24) aux vecteurs définis par (V.25). Désignons par ∇_i l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion $L_{i\ j}^{\ h}$ et par $W^i_{\ j,\ kh}$ le tenseur de courbure correspondant. Compte tenu de l'équation (V.26) nous obtenons :

(V.27)
$$\begin{aligned}
&-\nabla_h\left(g^{jk}_{+} \cdot L_{i\ k}^{\ 4} + A^{j4}_{+\ i} \right) - \nabla_h\left(g^{k\underline{j}} \cdot L_{k\ i}^{\ 4} + A^{4\ \underline{j}}_{\ \ i} \right) \\
&+ \partial_i \left[g^{jk} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} + A^{j4}_{\ \ h} + g^{kj} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} + A^{4\ j}_{\ \ h} \right] \\
&+ \left(g^{p\ k} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} + A^{p4}_{\ \ h} \right) . L_{p\ i}^{\ j} + \left(g^{kp} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} + A^{4p}_{\ \ h} \right) . L_{i\ p}^{\ j} \\
&= -\left(g^{k4} \cdot W^{j}_{\ k,\ ih} + g^{4k} \cdot \tilde{W}^{j}_{\ k,\ ih} \right)
\end{aligned}$$

Choisissons $i = 4$ puis contractons h et j

(V.28)
$$\begin{aligned}
&-\nabla_h\left(g^{\underline{hk}}_{+} \cdot L_{4\ k}^{\ 4} + A^{h\ 4}_{\ \ 4} \right) - \nabla_h\left(g^{k\underline{h}} \cdot L_{k\ 4}^{\ 4} + A^{4\ \underline{h}}_{\ \ 4} \right) \\
&+ \partial_4 \left[g^{h\ k} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} + A^{h\ 4}_{\ \ h} + g^{kh} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} + A^{4\ h}_{\ \ h} \right] \\
&+ \left[g^{pk} . L_{h\ k}^{\ 4} + A^{p4}_{\ \ h} \right] . L_{p\ 4}^{\ h} + \left[g^{kp} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} + A^{4\ p}_{\ \ h} \right] . L_{4\ p}^{\ h} \\
&\equiv g^{4k} \cdot \tilde{W}_{k4} + g^{k4} \cdot W_{k4}
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque le vecteur de torsion de $L_{i\ j}^{\ h}$ est nul nous avons :

$$\text{V.29)} \qquad \nabla_i v^{\underline{i}} = \nabla_i v^{\underline{i}} = \partial_i v^i + v^k \cdot L_{\underline{k\ h}}^{\ h}$$

De l'équation (V.26) nous tirons :

$$\text{V.30)} \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_j \sqrt{-g} = L_{\underline{j\ h}}^{\ h} + \frac{1}{2} \cdot A^{h\ k}_{\ j} \cdot g_{hk}$$

et l'identité (V.28) prend la forme :

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_j \left[(g^{jh} \cdot L_{4\ h}^{\ 4} + A^{j\ 4}_{\ 4\ 4} + g^{hj} \cdot L_{h\ 4}^{\ 4} + A^{4\ j}_{\ 4}) \sqrt{-g} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (A^{hk}_{\ j} \cdot g_{hk}) \cdot (g^{ji} \cdot L_{4\ i}^{\ 4} + A^{j4}_{\ 4\ 4} + g^{ij} \cdot L_{i\ 4}^{\ 4} + A^{4\ j}_{\ 4\ 4}) \\ \text{V.31)} \quad &+ \partial_4 (g^{jh} \cdot L_{j\ h}^{\ 4} + A^{h4}_{\ h} + g^{hj} \cdot L_{h\ j}^{\ 4} + A^{4h}_{\ h}) \\ &+ (g^{pk} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} + A^{p4}_{\ h}) \cdot L_{p\ 4}^{\ h} + (g^{kp} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} + A^{4\ p}_{\ h}) \cdot L_{4\ p}^{\ h} \\ &= g^{k4} \cdot W_{k4} + g^{4k} \cdot \tilde{W}_{k4} \end{aligned}$$

Remarquons que des changements d'indice donnent :

$$\text{V.32)} \quad g^{pk} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} \cdot L_{p\ 4}^{\ h} + g^{kp} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} \cdot L_{4\ p}^{\ h} = L_{h\ k}^{\ 4} \cdot \left[g^{pk} \cdot L_{p\ 4}^{\ h} + g^{hp} \cdot L_{4\ p}^{\ k} \right]$$

et que d'après l'équation (V.26) nous avons :

$$\text{V.33)} \quad g^{pk} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} \cdot L_{p\ 4}^{\ h} + g^{kp} \cdot L_{k\ h}^{\ 4} \cdot L_{4\ p}^{\ h} = - L_{h\ k}^{\ 4} \cdot \left[\partial_4 g^{hk} + A^{hk}_{\ 4} \right]$$

De l'équation (V.26), nous tirons encore la relation:

$$\begin{aligned} &2 g^{hk} \cdot L_{h\ k}^{\ 4} + A^{h4}_{\ h} + A^{4h}_{\ h} = - 2 (\partial_i g^{\underline{i4}} + g^{\underline{k4}} \cdot L_{\underline{k\ i}}^{\ i}) \\ \text{V.34)} \quad &= -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \left[\partial_i (g^{\underline{i4}} \cdot \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} \cdot g^{\underline{i4}} \cdot \sqrt{-g} \cdot A^{kj}_{\ i} \cdot g_{kj} \right] \end{aligned}$$

Les relations (V.33) et (V.34) permettent d'écrire l'équation (5.31) sous la forme :

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_h \left[\left(g^{hk} L_4{}^4{}_k + A^{h4}{}_4 + g^{kh} L_k{}^4{}_4 + A^{4h}{}_4 \right) \cdot \sqrt{-g} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \left(A^{pj}{}_h \cdot g_{pj} \right) \left(g^{hk} \cdot L_4{}^4{}_k + A^{h4}{}_4 + g^{kh} \cdot L_k{}^4{}_4 + A^{4h}{}_4 \right) \\
&+ \partial_4 \left[- \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\partial_j \left(g^{j4} \cdot \sqrt{-g} \right) + \frac{1}{2} g^{h4} \sqrt{-g} \cdot A^{kj}{}_h \, g_{kj} \right) \right] \\
&+ A^{p4}{}_h \cdot L_p{}^h{}_4 + A^{4p}{}_h \cdot L_4{}^h{}_p - L_h{}^4{}_k \left(\partial_4 g^{hk} + A^{hk}{}_4 \right) \\
&= g^{k4} \cdot W_{k4} + g^{4k} \cdot \tilde{W}_{k4}
\end{aligned}
\qquad \text{(V.35)}
$$

c) Supposons que le tenseur fondamental g^{ij} et la connexion linéaire $L_i{}^h{}_j$ soient liées par les équations d'Einstein, c'est à dire que :

$$A^{ij}{}_h = 0$$

Supposons, en outre, que le tenseur fondamental soit statique, c'est à dire que :

$$\partial_4 \, g^{ij} = 0$$

L'équation (V.35) devient alors :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \partial_h \left[\sqrt{-g} \left(g^{hk} L_4{}^4{}_k + g^{kh} L_k{}^4{}_4 \right) \right] = g^{k4} \cdot W_{k4} + g^{4k} \tilde{W}_{k4}$$

Le vecteur

$$H^h = - \left(g^{hk} \cdot L_4{}^4{}_k + g^{kh} \cdot L_k{}^4{}_4 \right)$$

est un vecteur d'espace car sa composante H^4 vaut :

$$H^4 = - \left(g^{4k} \cdot L_4{}^4{}_k + g^{k4} \cdot L_k{}^4{}_4 \right) = \partial_4 g^{44} = 0$$

Les H^B définissent sur chaque section d'espace un vecteur d'espace dont la divergence calculée dans V_4 est égale à $g^{k4} W_{k4} + g^{4k} \tilde{W}_{k4}$. Il en résulte le théorème généralisé de Gauss :

Si ∂C est le bord d'une chaîne C de la variété V_4 munie du tenseur fondamental g^{ij} et d'une connexion linéaire L_{ij}^{h} non symétriques, liés par les relations

$$L_{ih}^{h} = o \qquad \partial_h g^{ij} + g^{it} \cdot L_{ht}^{j} + g^{tj} \cdot L_{th}^{i} = o$$

et si le tenseur g^{ij} vérifie la condition

$$\partial_4 g^{ij} = o \ ,$$

le vecteur d'espace

$$H^A = -\left(g^{Ah} \cdot L_{4h}^{4} + g^{hA} \cdot L_{h4}^{4} \right)$$

vérifie la relation .

$$\text{flux}_{\partial c} \vec{H} = \int_c \left(g^{i4} \cdot W_{i4} + g^{4i} \cdot \tilde{W}_{i4} \right) \cdot \sqrt{-g} \cdot du$$

On ne peut pas déduire de ce résultat des conséquences analogues à celles qui découlent en Relativité Générale du théorème de Gauss et qui concernent les singularités du champ.

Les démonstrations reposent en effet sur la considération de deux champs l'un intérieur, l'autre extérieur et dans ce dernier cas sur le fait que R_{4}^{4} est positif.

Il ne semble pas qu'une remarque analogue puisse être faite en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger.

Conclusions

L'étude des singularités des solutions et celle des problèmes globaux présente en théorie du champ unifié asymétrique de grandes difficultés. La complication des calculs qui donnent

la connexion rend difficile l'étude de la généralisation des théorèmes globaux de la Relativité Générale, même dans les cas les plus simples.

La découverte d'une solution des équations du champ partout régulière et possédant un comportement asymptotique euclidien, paraît aléatoire. La possibilité de représenter la matière par une telle solution qui d'après Einstein devrait permettre d'obtenir les équations du mouvement d'une particule chargée semble très problématique.

C H A P I T R E VI

L'EFFET GRAVITATIONNEL DE SPIN

1. L'étude des milieux doués de spin conduit à introduire des tenseurs d'impulsion-énergie asymétriques.

Dès 1942, O. Costa de Beauregard a remarqué qu'il est alors nécessaire de généraliser les équations de la Relativité Générale [1] :

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} \cdot R = \chi \cdot T_{ij}$$

de manière que le premier membre devienne un tenseur asymétrique.

En 1958 D.W. Sciama est arrivé aux mêmes conclusions et il a proposé une théorie dont l'élément primitif est une variété V_4 munie d'une connexion linéaire $\Gamma_{i\ j}^{\ h}$ et d'un tenseur fondamental g^{ij} asymétriques .
Les équations du champ s'obtiennent en appliquant un principe variationnel à l'intégrale

$$\int_c (R_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}) \cdot d\tau$$

où R_{ij} est le tenseur de Ricci associé à la connexion $\Gamma_{i\ j}^{\ h}$ et $\mathcal{L}$ une densité scalaire indépendante de cette connexion .

Si l'on pose comme au Chapitre II :

$$L_{i\ j}^{\ h} = \Gamma_{i\ j}^{\ h} + \frac{2}{3} \cdot \delta_i^h \cdot \Gamma_{\ j}$$

les équations du champ qui généralisent celles de la théorie d'Einstein-Schrödinger s'écrivent :

---

(1) Journal de Mathématiques 1943 .

$$D_h\, g^{\underset{+-}{ij}} \equiv \partial_h g^{ij} + g^{it} \cdot L_{ht}^{\ j} + g^{tj} \cdot L_{th}^{\ i} = 0$$

I.1) $$\partial_i \left(g^{\underset{\vee}{ij}} \cdot \sqrt{-g} \right) = 0$$

$$R_{ij}\left(\Gamma\right) - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} \cdot R\left(\Gamma\right) = T_{ij}$$

où

$$T_{ij} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\vee}{g}{}^{ij}} + \frac{1}{2} \cdot g_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\vee}{g}{}^{pq}} \cdot g^{pq} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\vee}{g}{}^{ij}}$$

O. Costa de Beauregard a été conduit, par des raisonnements heuristiques, à introduire un tenseur antisymétrique G_{ij}, dit champ gravitationnel de spin, qui est lié à la partie antisymétrique $T_{\underset{\vee}{ij}}$ du tenseur d'impulsion-énergie par la relation:

$$c^2 \Box\, G_{ij} = 2 \chi \cdot T_{\underset{\vee}{ij}}$$

Or, si l'on cherche l'approximation minkowskienne de l'équation du champ

$$R_{\underset{\vee}{ij}} - \frac{1}{2} g_{\underset{\vee}{ij}} R = \chi \cdot T_{\underset{\vee}{ij}}$$

en supposant que le rationnel $\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i$ du vecteur de torsion de la connexion est négligeable, ce qui est légitime puisque le vecteur Γ_i est arbitraire, on obtient :

$$c^2 \cdot \Box\, g_{\underset{\vee}{ij}} = 2 \chi \cdot T_{\underset{\vee}{ij}}$$

Cette remarque conduit à identifier le champ gravitationnel de spin G_{ij} avec la partie antisymétrique du tenseur fondamental g_{ij}

La théorie de l'effet gravitationnel de spin prévoit pour une particule d'épreuve sans spin placée dans un champ gravita-

tionnel de spin une loi du mouvement qui diffère de la loi géodésique.

Nous allons étudier la loi du mouvement d'une telle particule en appliquant une méthode qui a été imaginée par A. Papapétrou pour résoudre un problème analogue en Relativité Générale. On suppose dans cette méthode que la particule d'épreuve a de petites dimensions afin d'éviter les difficultés (énergie infinie) qui résultent de l'hypothèse d'une particule ponctuelle.

Pour effectuer les calculs nous allons donner aux identités de conservation établies dans le Chapitre III, deux formes nouvelles.

2. Une forme des équations de conservation .

Les équations de conservation du tenseur T_{ij} peuvent s'écrire d'après les résultats du Chapitre III, paragraphe 7 :

.2) $$0 = 2\,\partial_i\left(T_{\underline{jp}}\cdot \mathfrak{g}^{\underline{ip}} + T_{\underline{\underline{jp}}}\cdot \mathfrak{g}^{\underline{\underline{ip}}}\right) + \sqrt{-g}\,\left(T_{\underline{pq}}\cdot\partial_j\, g^{\underline{pq}} + T_{\underline{\underline{pq}}}\cdot\partial_j\, g^{\underline{\underline{pq}}}\right)$$

Posons

$$g^{\underline{ip}} = h^{ip}$$

et définissons le tenseur associé à h^{ip} par la relation

I.3) $$h_{ip}\,.\,h^{iq} = \delta^{q}_{p}$$

Nous utiliserons les tenseurs h^{ip} et h_{iq} pour élever et pour abaisser les indices. Nous soulignerons les indices qui ont subi une élévation.

Ainsi, pour la partie symétrique de T_{ij}, nous aurons :

$$T_{\underline{jp}}\,.\,h^{ip} = T^{\underline{i}}_{\underline{j}} = T^{\underline{i}}_{\underline{\underline{j}}}$$

.4)

$$T^{\underline{p}}_{\underline{q}}\,.\,h^{jq} = T^{\underline{jp}}_{\underline{\underline{\ }}} = T_{\underline{qr}}\,.\,h^{jq}\,.\,h^{pr}$$

Nous obtenons alors

(VI.5) $$\partial_i(T_{\underline{jp}} \cdot \underline{\underline{\varphi}}^{ip}) = \partial_i(T_{\underline{j}}^{\underline{i}} \sqrt{-g}) = \partial_i (T^{\underline{pi}} \cdot h_{pj} \sqrt{-g})$$

De la relation (VI.3) nous tirons

(VI.6) $$\partial_j h^{pq} = - (\partial_j h_{rs}) \cdot h^{pr} \cdot h^{qs}$$

Les relations (VI.5) et (VI.6) permettent d'écrire l'équation (VI.2) sous la forme

(VI.7) $$2\partial_i(\sqrt{-g} \cdot T^{\underline{pi}}) h_{pj} + 2\sqrt{-g} T^{\underline{pi}} \partial_i h_{jp} - \sqrt{-g} \cdot T^{\underline{ip}} \cdot \partial_j h_{ip}$$

$$2\partial_i(T_{\underline{jp}} \cdot \underline{\underline{\varphi}}^{ip}) + \sqrt{-g} \cdot T_{\underline{pq}} \partial_j g^{\underline{pq}} = 0$$

Après multiplication des deux membres des équations (VI.7) par h^{kj}, nous obtenons en désignant par $\left\{ {i \atop j} {h \atop k} \right\}$ les symboles de Christoffel de seconde espèce associés au tenseur métrique h_{ij}:

(VI.8) $$\partial_i (T^{\underline{ki}} \cdot \sqrt{-g}) + \sqrt{-g} \cdot T^{\underline{pq}} \cdot \left\{ {p \atop q} {k \atop h} \right\}$$

$$+ h^{kj} \left[\partial_i(T_{\underline{jp}} \cdot \underline{\underline{\varphi}}^{ip}) + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \cdot T_{\underline{pq}} \cdot \partial_j g^{\underline{pq}} \right] = 0$$

Si les x désignent les coordonnées d'un point arbitraire, nous pouvons mettre les équations (VI.8) sous la forme équivalente

(VI.9) $$\partial_i (T^{\underline{ki}} \cdot \sqrt{-g} \cdot x^h) + \sqrt{-g} \cdot T^{\underline{pq}} \cdot \left\{ {p \atop q} {k \atop h} \right\} \cdot x^h - \sqrt{-g} \cdot T^{\underline{kh}}$$

$$+ x^h \cdot h^{ki} \cdot \left[\partial_p(T_{\underline{iq}} \cdot \underline{\underline{\varphi}}^{pq}) + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \, T_{\underline{pq}} \cdot \partial_i g^{\underline{pq}} \right] = 0$$

On peut remarquer que le tenseur T_{ij} n'est pas conservatif pour la connexion riemannienne associée au tenseur h_{ij}.

Dans la suite nous supposerons que le tenseur T_{ij} est symétrique. Les équations (VI.8) et (VI.9) se simplifient alors: les deux derniers termes de chacun des premiers membres de ces équations disparaissent.

Si le tenseur T_{ij} est symétrique, il est égal à sa partie symétrique $T_{\underline{ij}}$ et nous supprimerons le signe de symétrisation dans les équations précédentes.
Dans ce cas l'équation (VI.8) peut s'écrire :

$$\overset{h}{\nabla}_i \left(T^{\underline{ki}} \sqrt{\quad} \right) = 0$$

où $\overset{h}{\nabla}_i$ est l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion $\left\{ {h \atop i\ j} \right\}$

3. Mouvement d'une particule d'épreuve [45] [55]

En Relativité Générale A. Papapetrou a étudié le mouvement d'une particule d'épreuve de petites dimensions douée ou non de spin et placée dans un champ gfavitationnel. Nous allons appliquer la même méthode à l'étude de la loi du mouvement d'une particule d'épreuve sans spin dans un champ gravitationnel de spin.

La particule d'épreuve ayant des dimensions très petites, son mouvement est représenté par un tube d'univers très délié. A l'intérieur de ce tube le champ est défini par les équations :

$$\partial_i \mathfrak{g}^{ij} = 0 \qquad D_i \mathfrak{g}^{\underline{jh}} = 0$$

I.10)

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} (R_{pq} \cdot g^{ij}) = T_{ij}$$

A l'extérieur de ce tube le champ est défini par les équations :

$$\partial_i \left(\underset{\sim}{ij} \right) = 0 \qquad D_i \left(\underset{\sim}{jh} \right) = 0$$

(I.11)

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \left(R_{pq} \cdot g^{pq} \right) = 0 \quad .$$

Le tenseur T_{ij} est le tenseur d'impulsion-énergie de la particule.

Considérons la section V de ce tube par l'hypersurface dont l'équation est :

(VI.12) $$x^4 = t = Cte$$

Cette section étant très petite, nous pouvons développer les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} h \\ p\ j \end{matrix} \right\}$ associés à la métrique définie par le tenseur h_{ij} en série de Taylor au voisinage du point X, de coordonnées X^i, commun à la section V et à une ligne d'univers arbitraire intérieure au tube considéré .

(VI.13) $$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}_X + \left(x^k - X^k \right) . \left(\partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}_X \right) + \ldots .$$

L'indice X rappelle que les expressions auxquelles il s'applique sont calculées au point X et x^k désigne les coordonnées d'un point quelconque de V.

Nous supposons que la particule d'épreuve considérée est dénuée de spin , c'est à dire que

(I.14) $$T_{\underset{\sim}{ij}} = 0$$

Intégrons les deux membres des identités de conservation (VI.8) sur la section V du tube d'univers :

(I.15) $$\int_V \partial_i \left(T^{ki} \cdot \sqrt{-g} \right) dv + \int_V T^{ij} \cdot \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\} \cdot \sqrt{-g} \cdot dv$$

La seconde intégrale peut s'évaluer à l'aide du développement (VI.13). Nous admettrons que :

$$\int_V T^{ij} \left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\} \sqrt{-g} \cdot dv = \int_V T^{ij} \left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X \sqrt{-g}\ dv$$

ce qui revient à supposer que toutes les intégrales qui proviennent du second membre de (VI.13) sont nulles à l'exception de la première.

Enfin le théorème de Stokes donne :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^A} \left(T^{Ak} \cdot \sqrt{-g} \right) dv = 0 \qquad (A = 1, 2, 3)$$

Il en résulte que :

$$\text{(VI.16)} \quad \frac{d}{dt} \left(\int_V T^{4b} \cdot \sqrt{-g} \cdot dv \right) + \left\{ \begin{matrix} h \\ j\ i \end{matrix} \right\}_X \int_V T^{ji} \cdot \sqrt{-g} \cdot dv .$$

Intégrons les identités de conservation (VI.9) sur V en tenant compte du développement (VI.13) et des identités

$$x^i = X^i + x^i - X^i$$

Supposons, comme précédemment, que toutes les intégrales dont l'élément différentiel contient le facteur $(x^i - x^i)$ sont nulles.

Nous aurons :

$$\int_V T^{ij} \left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\} x^k \sqrt{-g}.dv = X^k \left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X \int_V T^{ij} \cdot \sqrt{-g} \cdot dv$$

et une nouvelle application du théorème de Stokes donne :

$$\text{(VI.17)} \quad \frac{d}{dt} \left(\int_V T^{h4} \cdot \sqrt{-g} \cdot X^k \cdot dv \right) + X^k \left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X \int_V T^{ij} \sqrt{-g}. dv$$

$$- \int_V T^{hk} \cdot \sqrt{-g} \cdot dv = 0$$

Eliminons $\frac{d}{dt}\left[\int_V T^{h4}.\sqrt{-g}\,dv\right]$ entre les équations (VI.16) et (VI.17)

I.18) $$(\frac{dX^k}{dt}).\int_V T^{h4}.\sqrt{-g}.dv = \int_V T^{hk}.\sqrt{-g}.dv$$

Prenons h égal à 4 dans l'équation (VI.18) et dérivons les deux membres de cette équation par rapport à t

I.19) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{dX^k}{dt}.\int_V T^{44}\sqrt{-g}.dv\right] = \frac{d}{dt}\left[\int_V T^{4k}.\sqrt{-g}.dv\right]$$

L'équation (VI.16) et l'équation (VI.18) permettent d'écrire (VI.19) sous la forme :

I.20) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{dX^k}{dt}.\int_V T^{44}.\sqrt{-g}.dv\right] + \left\{\begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix}\right\}_X . \frac{dX^i}{dt}.\frac{dX^j}{dt}.\int_V T^{44}\sqrt{-g}.dv$$

Choisissons le tenseur h_{ij} comme tenseur métrique et posons :

$$ds^2 = h_{ij}.dx^i.dx^j \quad ; \quad u^i = \frac{dX^i}{ds} = \frac{dX^i}{dt}.\frac{dt}{ds}$$

Puisque X est égal à t, il en résulte que :

$$u^4 = \frac{dt}{ds} \qquad u^i = \frac{dX^i}{dt}.u^4$$

et que

$$u^i . u^j . h_{ij} = 1$$

Si nous définissons la masse m par la relation

I.21) $$m = \frac{1}{u^4}\int_V . T^{44}.\sqrt{-g}.dv$$

L'équation (VI.18) devient :

I.22) $$\frac{d}{ds}\left(m \cdot u^k \right) + m \cdot u^i \cdot u^j \cdot \left\{ \begin{matrix} k \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X = 0$$

d'où nous tirons

I.23) $$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad \frac{\nabla u}{ds} = 0 \quad (\text{si } m \neq o)$$

en désignant par ∇ l'opérateur de dérivation absolue associé à $\left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X$. Par définition, une particule d'épreuve ne modifie pas le champ dans lequel elle est placée et l'on calcule $\left\{ \begin{matrix} h \\ i\ j \end{matrix} \right\}_X$ en utilisant le tenseur h_{pq} obtenu à partir d'une solution g_{ij} des équations (VI.11) du champ extérieur.

Ainsi, la trajectoire d'une particule d'épreuve dénuée de spin dans un champ gravitationnel de spin est une géodésique de la métrique définie par le tenseur h_{ij}. La masse de cette particule

$$m = \frac{1}{u^4} \int_V T^{44} \sqrt{-g} \cdot dv$$

est conservative.
Cette masse est obtenue en intégrant la composante T^{44} du tenseur d'impulsion-énergie de la particule d'épreuve sur le volume à trois dimensions de cette particule

4. <u>Un cas particulier</u> [57]

Supposons que le tenseur d'impulsion-énergie de la particule d'épreuve considérée ait la forme

$$T_{ij} = \rho \cdot u_i \cdot u_j$$

où u_i désigne les composantes covariantes d'un vecteur unitaire dans la métrique définie par le tenseur h_{ij}

Supposons en outre que le vecteur u^i reste constant en tous les points de chacune des particules d'épreuve. Cette hypothèse revient à supposer que ces particules sont animées d'un mouvement de translation.

Dans ces conditions, la formule (VI.21) montre que la masse d'une particule d'épreuve est définie par

$$m = \int_V \rho\, u^4 \cdot \sqrt{-g}\ \cdot dv \qquad \text{(VI.24)}$$

Cette expression est analogue à celle qui a été donnée par Mme Hennequin en Relativité Générale, mais elle fait intervenir

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-h}\ \cdot \left[1 + \frac{h}{f} + \frac{1}{2}\, h_{ij} \cdot h_{pq} \cdot f^{ip} \cdot f^{jq} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

au lieu de $\sqrt{-h}\ .$ [14]

Les identités de conservation (VI.8) appliquées au tenseur $\rho \cdot u_i \cdot u_j$ donnent, après multiplication par u^i :

$$\partial_j \left(\rho \cdot u^j \cdot \sqrt{-g} \right) = 0$$

Intégrons cette relation sur le volume V de la particule considérée . Nous obtenons :

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \cdot u^4 \cdot \sqrt{-g} \cdot dv \right] + \int_V \partial_A \left(\rho \cdot u^A \cdot \sqrt{-g} \right) \cdot dv$$

D'après le théorème de Stokes la seconde intégrale est nulle et

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \rho \cdot u^4 \cdot \sqrt{-g} \cdot dv \right] = 0$$

La masse m définie par la relation (VI.24) est donc bien conservative.

5. Une remarque [55]

Nous avons déjà dit que la théorie de l'effet gravitationnel de spin prévoit pour une particule sans spin placée dans un champ gravitationnel de spin une loi du mouvement qui diffère de la loi géodésique .

M. O. Costa de Beauregard a suggéré [54] qu'une modification du lagrangien de la théorie, $R_{ij} \cdot \mathcal{G}^{ij} + \mathcal{L}$, pourrait permettre de retrouver la loi du mouvement qu'il a obtenue par des raisonnements heuristiques.

Au Chapitre III, nous avons prouvé que toutes les intégrales d'action de la forme

$$\int_c \left(H_{ij} \cdot g^{ij} \sqrt{-g} + \mathcal{L} \right) d\tau$$

où H_{ij} désigne un tenseur qui ne dépend que des coefficients de la connexion affine et $\mathcal{L}$ une densité scalaire indépendante de ces coefficients, conduisent aux équations de conservation (VI.8) du tenseur d'impulsion-énergie T_{ij} défini par (VI.1). Le calcul que nous venons de faire prouve que, quel que soit le tenseur H_{ij} , les équations de conservation (VI.8) conduisent toujours à une loi géodésique pour le mouvement d'une particule d'épreuve sans spin, lorsqu'on choisit le tenseur h_{ij} comme tenseur métrique .

Conclusions

Nous avons élargi le cadre de la théorie d'Einstein-Schrödinger en plongeant une variété différentiable à quatre dimensions dans une variété pentadimensionnelle munie d'un tenseur fondamental et d'une connexion linéaire asymétrique. Ce plongement permet d'associer un vecteur, une connexion affine, et une connexion coaffine .

Il permet aussi de donner une origine géométrique aux termes phénoménologiques que l'on peut introduire dans une théorie unitaire asymétrique.

La plupart des systèmes d'équations du champ que l'on peut obtenir à l'aide d'un principe variationnel sont dépourvus d'intérêt, mais la théorie permet de retrouver, dans des cas particuliers, les théories d'Einstein-Schrödinger, de Mme Tonnelat, et la théorie de Bonnor qui devient unitaire.

Les identités de conservation, qui ont la même forme que celles de la théorie unitaire classique, permettent d'étendre à tous les systèmes d'équations du champ que l'on peut déduire par un système variationnel du lagrangien

$$\mathcal{G}^{ij} \cdot H_{ij}\left(\Gamma^{p}_{qr}, \partial_s \Gamma^{p}_{qr}, \rho, A_i, \ldots\right) + \mathcal{L}\left(\mathcal{G}^{ij}, \rho, A_i \ldots\right)$$

un résultat remarquable obtenu par Mme Tonnelat dans sa théorie linéaire : La méthode du tenseur d'énergie donne des équations du mouvement qui, compte tenu des équations de liaison, se réduisent à des identités , sous la seule condition que les équations antisymétriques du champ soient vérifiées.

La seule généralisation de la théorie unitaire asymétrique qui conduise , par la méthode du tenseur d'énergie, aux équations du mouvement d'une particule chargée, est donc celle qui a été proposée par Mme M.A. Tonnelat.

Il ne semble pas que l'idée d'Einstein de représenter la matière par des solutions régulières des équations du champ puisse conduire à une solution satisfaisante du problème des équations du mouvement. La découverte d'une telle solution reste à faire, et les théorèmes globaux démontrés par M. A. Lichnerowicz ne

semblent pas pouvoir être étendus à la théorie unitaire asymétrique.

Les grandes difficultés auxquelles se heurte cette théorie limitent sérieusement les espoirs qu'elle avait fait naître.

Cependant, en proposant de lier la théorie du champ asymétrique aux effets de spin, Sciama et Costa de Beauregard ont posé des problèmes nouveaux et intéressants qui conduiront peut-être à une interprétation satisfaisante de la théorie d'Einstein-Schrödinger.

B I B L I O G R A P H I E

1) GENERALITES

1	P.G. BERGMANN	Introduction to the theory of Relativity - Prentice Hall - New-York (1942)
2	E. CARTAN	Les espaces à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. Ec. Norm. Sup. t.40 (1923)
3	J. CHAZY	La théorie de la Relativité et la Mécanique Céleste. Gauthier-Villars, Paris (1930)
4	G. DARMOIS	Les équations de la gravitation einsteinienne. Memorial des Sc. Math., fasc. 25, (1927)
5	A. EINSTEIN	The Meaning of Relativity 3 rd. ed. Princeton University Press (1950)
6	A. EINSTEIN	Théorie de la gravitation généralisée Gauthier-Villars (1951)
7	L. EISENHART	Non Riemannian Geometry American Mathematical Society (1927)
8	V. FOCK	The Theory of Space time and Gravitation Pergamon Press (1959)
9	V. HLAVATY	Geometry of Einstein's Unified Field theory P. Noordhoff Groningen (1957)
10	A. LICHNEROWICZ	Eléments de calcul tensoriel A. Colin (1951)
11	A. LICHNEROWICZ	Algèbre et Analyse linéaire, Masson, Paris
12		Les théories relativistes de l'électromagnétisme et de la gravitation, Masson Paris (1954)
13	Mme M.A. TONNELAT	La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques uns de ses développements. Gauthier-Villars, Paris (1954)
14		Les principes de la théorie de l'électromagnétisme et de la Relativité, Masson Paris (1959)

11) ESPACES FIBRES ET CONNEXIONS INFINITESIMALES

15	Mme CATTANEO GASPARINI	Ann. Scuolo. Norm. Sup. Pisa, t.10 (1956) p. 119
16	Mme CATTANEO GASPARINI	Rend. Accad. Lincei, t. 22, (1957) p. 146
17	EHRESMANN	Colloque de topologie, Bruxelles 1950 p. 29-55
18	A. LICHNEROWICZ	Théorie globale des connexions et des groupes à l'holonomie, Cremonese, Rome 1955
19	Mme F. MAURER-TISON	C.R. Acad. Sc. t.245 1957 p. 995
20		C.R. Acad. Sc. t.246 1958 p. 38
21		C.R. Acad. Sc. t.246 1958 p. 140
22		Thèse. Aspects nathématiques de la théorie du champ unifié d'Einstein. Paris 1958

GENERALISATIONS DE LA THEORIE UNITAIRE NON SYMETRIQUE

23	W.B. BONNOR	The equations of motion in the non symetric unified field theory Proc. Roy. Soc. t.226, 1954, p. 336
24		Les équations du mouvement en théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger. Ann. Inst. H. Poincaré, Paris 1957 15. 133-145
25	Mme L. BOUCHE	Thèse, Paris 1961
26	B. KURSUNOGLU	Gravitation and Electrodynamics The Physical Review Vol. 88 nº 6 1952 pp 1369-79
27	M. LENOIR	Principe d'une théorie unitaire C.R. Acad. Sc. t. 248 p. 1944-1946
28		t. 248 p. 2074-75
29	Mme M.A. TONNELAT	La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques uns de ses développements Note II p. 129
30		Contribution au Colloque gravitation 1959 : Généralisation des équations du champ unifié asymétrique
31		C.R. Acad. Sc. Fr. 1960 t.250 p.2327-9
32		C.R. Acad.Sc.Fr.1960 t.251 p.2892-94

SOLUTION A SYMETRIE SPHERIQUE

33 W.B. BONNOR — Solutions statiques à symétrie sphérique dans la théorie du champ unifié d'Einstein
Proc. Roy. Soc. t.209 1951 p. 353

34 t.210 1952 p. 427

35 J. HAAG — Le Problème de Schwarzchild
Memorial Sci. Math. Gauthier-Villars, Paris 1931

36 M. LENOIR — Sur les solutions à symétrie sphérique de la théorie du champ unifié.
C.R. Acad. Sc. t. 250, 1960 p. 981-83

37 Mlle S. MAVRIDES — Sur le choix de la métrique et du champ électromagnétique en théorie unitaire d'Einstein.
C.R. Acad. Sc. t.238 1954 p. 1556
t.239 1954 p. 637

38 Courant et charge en théorie unitaire d'Einstein.
C.R. Acad. Sc. t.238 1954 p. 1643
J.Phys.Rad. t. 16 1955

39 Sol. non statique à symétrie sphérique des équations de la théorie unitaire d'Einstein
C.R. Acad. Sc. t.239 1954 p. 1597

40 A. PAPAPETROU — Solution statique à symétrie sphérique
Proc. Roy. Irish. Acad. A. t.52,1948 p.69

41 J. PACHNER — Mouvement de translation et déviation de la lumière dans un champ statique à symétrie sphérique.
Ann. Phys. Dtsch, 1, 1958.

EQUATIONS DU MOUVEMENT

42 E. CLAUSER — Mouvement d'une particule dans le champ unifié d'Einstein. Rendi.Acc.Lincei,t21, 1956, p. 408

43 Loi du mouvement dans la dernière théorie unitaire d'Einstein. Nuovo Cimento 10, t.7 1958, p. 764 .

44 Mme F. HENNEQUIN — Etude mathématique des approximations en Relativité Générale et en Théorie unitaire de Jordan-Thiry. Thèse, Paris 1956

45 A. PAPAPETROU — Le problème du mouvement dans la Relativité Générale et en théorie du champ unifié d'Einstein. Ann. Inst. H. Poincaré t. 15, 1957, p. 173.

46 PHAM TAN HOANG — La méthode des singularités pour les équations du mouvement en Relativité Générale et en Théorie du champ unifié . Thèse, Paris, 1957 .

47 H. TREDER — Champ électrique et définition du courant en théorie du champ unifié d'Einstein. Ann. Phys. Dtsch. t.19,1956,p.369-380

ESPACES-TEMPS STATIQUES

48 M. LENOIR — C.R. Acad. Sc. t. 237 1953 p. 384-85

49 — t. 237 1953 p. 424-25

50 A. LICHNEROWICZ — Problèmes globaux en Mécanique Relativiste. Hermann 1939

51 Ch. RACINE — C.R. Acad. Sc. t. 192 1931 p. 1533

L'EFFET GRAVITATIONNEL DE SPIN

52 Θ. COSTA DE BEAUREGARD — L'effet gravitationnel de spin. C.R. Acad. Sc. T.246 1958 p. 237-561

53 — L'hypothèse de l'effet gravitationnel de spin C.R. Acad. Sci. T. 247 1958

54 — Cahiers de Physique nº 105, Mai 1959 p. 200-216

55 M. LENOIR — C.R. Acad. Sc. T.251 p. 2303-304

56 D.W. SCIAMA — On the non symmetric theory of the pure gravitationnal field Proc. Cambridge Phil. Soc. T.54-1958-p.11

57 Mmes M.A. TONNELAT et L. BOUCHE — C.R. Acad.Sc.T.250,1960 p.4289

TABLE DES MATIERES

1..... Introduction

13.... Notations et symboles

Chapitre I

- A) Espaces fibrés

16.....1. Espace fibré principal.

18.....2. Espace fibré principal et algèbre de Lie.

19.....3. Connexions infinitésimales sur un espace fibré principal.

19.....4. Sections locales.

21.....5. Tenseurs et formes tensorielles sur E.

21.....6. Différentielle d'une q. forme. Courbure d'une connexion infinitésimale.

22.....7. Repères et corepères.

24.....8. L'espace fibré principal E (V_n)

24.....9. Connexion linéaire .

25....10. Différentielle absolue d'une connexion linéaire.

26....11. Torsion et courbure d'une connexion linéaire.

27....12. Formules explicites en repères naturels.

29....13. L'espace fibré des repères affines. Connexions affines

31....14. L'espace fibré des repères coaffines. Connexions coaffines

- B) Géométrie d'une hypersurface

33.....1. Les vecteur N^α et N_α

35.....2. Les transformations qui conservent les vecteurs N^α sur V_n

39.....3. Tenseurs dérivés

42.....4. Connexion induite

44.....5. Tenseurs dérivés fondamentaux

47.....6. Les formules de Gauss et de Codazzi

48.....7. Géodésiques

Chapitre II . Les équations du champ

- A) Théorie d'Einstein-Schrödinger.

51 .... 1. La variété fondamentale .
52 .... 2. Equations du champ .
54 .... 3. Le problème de Cauchy .
56 .... 4. Les solutions à symétrie sphérique

- B) Les théories de Mme M.A.Tonnelat et de W.B. Bonnor .

57 .... 1. La théorie linéaire générale de Mme M.A. Tonnelat.
60 .... 2. La théorie de W.B. Bonnor .

- C) Principe de l'extension de la théorie.

62 .... 1. Le tenseur fondamental.
65 .... 2. L'intégrale d'action.
65 .... 3. Les équations du champ.
68 .... 4. Discussion
68 ..... Equation relative à m_{ji} .
70 ..... Equation relative à p^{i}_{h} .

- D) Extensions de la théorie non symétrique

71 .... 5. Le tenseur matériel.
72 .... 6. Le tenseur électromagnétique.
74 .... 7. Les généralisations de la théorie non-symétrique
a) Assimilation des Γ_{ij} aux potentiels électromagnétiques.
74 ..... 1) norme de q^{i}
75 ..... 2) norme de g^{oi}

b) Méthode de Bonnor

77 ..... 1) un système du type maxwellien

2) l'hypothèse $g^{oi} = o$.

78 ..... une théorie du type Einstein-Schrödinger.

80 ..... une théorie du type Einstein-Tonnelat.

Chapitre III. Les identités de conservation

83 .... 1. .....

84 .... 2. Les identités de Bianchi.

85 .... 3. Identités de conservation.

86 .... 4. Un théorème sur les identités de conservation.

89 .... 5. Une autre forme de ce théorème.

91 .... 6. Première définition du tenseur d'impulsion-énergie.

93 .... 7. Deuxième définition du tenseur d'impulsion-énergie.

94 ..... Conclusions

Chapitre IV . La théorie de Bonnor et l'une de ses extensions.

- I) La théorie de Bonnor

95 .... 1. Le problème de Cauchy.

97 .... 2. Solution à symétrie sphérique.

98 ..... a) Un théorème sur les équations du champ.

100 ..... b) Une autre forme de ce théorème.

101 ..... c) Application à la recherche d'une solution statique à symétrie sphérique.

107 ..... d) Intégration directe des équations de Bonnor.

108 ..... e) Cas non statique.

109 ..... f) Courant et charge.

- II) Une extension de la théorie de Bonnor

A. Les équations approchées

110 .... 1. Les équations de liaison

111 .... 2. Le tenseur gravitationnel l_{ij}

112 .... 3. Un lemme

113 .... 4. Approximations successives

114....5. Expressions rigoureuses de R_{ij} (L) et de R_{ij} (Δ)
115....6. Ecpression approchée de R_{ij} (Δ)
117....7. Expression approchée de R_{ij} (L) .
117....8. Equations approchées d'une extension de la théorie de Bonnor.

- B. Equations du mouvement

122....9. Identités de conservation.
122...10. Changement de métrique.
126...11. Equations du mouvement
128...12. Conclusions

Chapitre V. Espaces-temps statiques

- A. Solutions partout régulières.

131....1. Régularité d'un espace-temps.
132....2. Variété riemannienne complète.
133....3. Théorème de Hopf. Conséquences.
134....4. Espace-temps statique pseudo-orthogonal.

- B. Théorème de Gauss
139

Chapitre VI. Effet gravitationnel de spin

145....1. .....
147....2. Une autre forme des identités de conservation.
149....3. Mouvement d'une particule d'épreuve sans spin.
153....4. Un cas particulier.
155....5. Une remarque.

Conclusions..... 155

Bibliographie 158

Table des matières 162

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Isométries et transformations analytiques d'une variété kahlérienne compacte.

Vu et approuvé :
Paris, le 25 avril 1962
Le Doyen de la Faculté des Sciences
M. ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE